7. Drallsatz

7.1 Drallerhaltung

7.2 Anwendung des Drallsatzes auf Strömungsmaschinen

7.2.1 Drall am Beispiel einer axialen Strömungsmaschine

7.2.2 Drall am Beispiel einer radialen Strömungsmaschine

7.1 Drallerhaltung

Linearer Impuls $\vec{I}$

- Produkt eines Massepunktes der Masse m und seiner Geschwindigkeit $\vec{c}$

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c}$$

Drall oder Drehimpuls $\vec{L}$

- Produkt eines Massepunktes der Masse m mit dem Kreuzprodukt aus Ortsvektor $\vec{r}$ und seiner Geschwindigkeit $\vec{c}$

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) = \vec{r} \times \vec{I}$$

7.1 Drallerhaltung

Translatorisch durchströmtes System

- Zeitliche Änderung des Impulses ergibt eine Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Rotorisch durchströmtes System

- Zeitliche Änderung des Dralls ergibt ein Moment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

7.1 Drallerhaltung

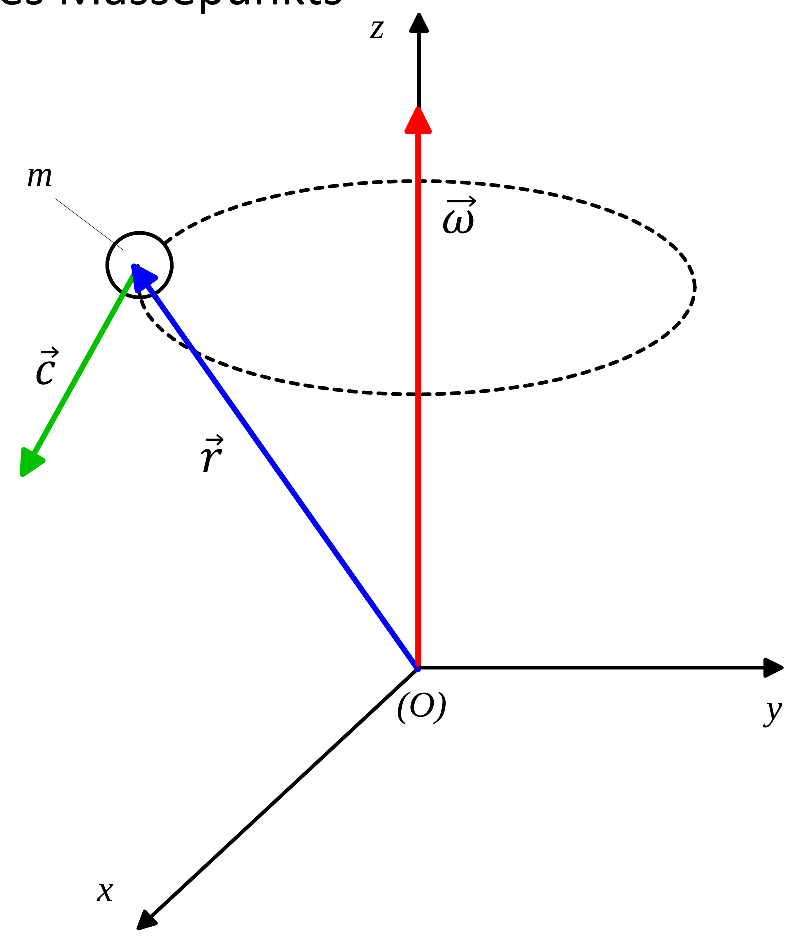
Starrer Körper in Rotation

- Rotiert ein Massepunkt m mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine feste Achse, so gilt für die Geschwindigkeit $\vec{c}$ des Massepunkts

$$\vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Drehimpuls des Massepunkts

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{c} = m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



7.1 Drallerhaltung

Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

- Homogene Masseverteilung, Teilmassen m_i

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \cdot \vec{r}_\mathrm{i} \times \vec{c}_\mathrm{i} = \sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \cdot \vec{r}_\mathrm{i} \times (\vec{\omega}_\mathrm{i} \times \vec{r}_\mathrm{i})$$

- Rotation um die z-Achse

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_\mathrm{i} \\ y_\mathrm{i} \\ z_\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot y_\mathrm{i} \\ \omega \cdot x_\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_\mathrm{i} \times (\vec{\omega}_\mathrm{i} \times \vec{r}_\mathrm{i}) = \begin{pmatrix} x_\mathrm{i} \\ y_\mathrm{i} \\ z_\mathrm{i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega \cdot y_\mathrm{i} \\ \omega \cdot x_\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot x_\mathrm{i} \cdot z_\mathrm{i} \\ -\omega \cdot y_\mathrm{i} \cdot z_\mathrm{i} \\ \omega \cdot \left({x_\mathrm{i}}^2 + {y_\mathrm{i}}^2\right) \end{pmatrix}$$

7.1 Drallerhaltung

Gesamtdrehimpuls des starren Körpers

- Mit dem Abstand $r_{\mathrm{i},\perp}$ des Masseelements m_i zur Drehachse gilt für den Drehimpuls des gesamten Körpers

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \cdot r_{\mathrm{i},\perp}\right) \cdot \vec{\omega}$$

- Massenträgheitsmoment des starren Körpers

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \cdot r_{\mathrm{i},\perp}$$

- Drehimpuls

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \cdot r_{\mathrm{i},\perp}\right) \cdot \vec{\omega} = J \cdot \vec{\omega}$$

7.1 Drallerhaltung

Analogie zwischen Impuls und Drehimpuls

Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{I} + \vec{r} \times \dot{\vec{I}}$$

wegen

$$\vec{I} = m \cdot \vec{c} = m \cdot \dot{\vec{r}}$$

folgt

$$\dot{\vec{r}} \parallel \vec{I}$$

Impuls- und Geschwindigkeitsvektor verlaufen parallel, somit ergibt das Kreuzprodukt

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{I} = 0$$

7.1 Drallerhaltung

Analogie zwischen Impuls und Drehimpuls

Impuls- und Geschwindigkeitsvektor verlaufen parallel, somit ergibt das Kreuzprodukt

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{I} = 0$$

und es gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{I}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{I}} = \vec{r} \times \dot{\vec{I}}$$

Mit $\vec{F} = \dot{\vec{I}}$ ergibt sich aus der zeitlichen Änderung des Drehimpulses ein Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{I}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

7.1 Drallerhaltung

Analogie zwischen Impuls und Drehimpuls

- Kraft bewirkt zeitliche Änderung des Impulses
- Impulsstrom = Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \dot{\vec{I}}$$

- Drehmoment bewirkt zeitliche Änderung des Drehimpulses
- Drallstrom = Moment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$$

- Drallstrom entspricht Drehenergie der Fluidmasse um einen Bezugspunkt

7.1 Drallerhaltung

- Differenz zwischen aus- und eintretendem Drallstrom in einen Kontrollraum entspricht der Summe aller im Kontrollraum auf das Fluid wirkenden Momente

$$\overrightarrow{\dot{L}_2} - \overrightarrow{\dot{L}_1} = \dot{m} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{c}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{c}_1) = \sum \vec{M}$$

oder

$$\sum \vec{M} = \vec{\dot{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{m} \cdot (\vec{r} \times \vec{c})$$

bzw.

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{\mathrm{A}_1} + \vec{M}_{\mathrm{A}_2} + \vec{M}_{\mathrm{W}} + \vec{M}_{\mathrm{S}} + \vec{M}_{\mathrm{G}}$$

7.1 Drallerhaltung

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{A_1} + \vec{M}_{A_2} + \vec{M}_W + \vec{M}_S + \vec{M}_G$$

- $\vec{M}_{A_1}$ und $\vec{M}_{A_2}$ Momente an den Ein- und Austrittsflächen
- $\vec{M}_W$ Moment infolge von Reibung
- $\vec{M}_S$ Moment infolge von Stützkräfte auf Einbauten
- $\vec{M}_G$ Moment infolge der Gewichtskraft

7.1 Drallerhaltung

- Relevant ist das Drehmoment um die Bezugsachse
- Beiträge können nur diejenigen Geschwindigkeitskomponenten liefern, die senkrecht auf einem Radius zur Drehachse vorliegen

$$M = \dot{m} \cdot \left(r_2 \cdot c_{\mathrm{u}_2} - r_1 \cdot c_{\mathrm{u}_1}\right)$$

- Im reibungsfreien Fall verschwindet das Moment und es gilt $M = 0$

$$r_2 \cdot c_{\mathrm{u}_2} - r_1 \cdot c_{\mathrm{u}_1}$$

oder

$$c_{\mathrm{u}_2} = c_{\mathrm{u}_1} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

7.1 Drallerhaltung

- Solange keine äußeren Momente auf das System wirken, bleibt auch der Drehimpuls des Systems konstant

Aus

$$\vec{M} = 0$$

folgt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

bzw.

$$\vec{L} = const.$$

7.1 Drallerhaltung

- Drehimpuls = Masseträgheitsmoment *x* Winkelgeschwindigkeit
- Drehimpulserhaltung bedeutet

$$\vec{L} = \vec{J} \times \vec{\omega} = const.$$

- Rotation um eine einzige Achse

$$L = J \cdot \omega = const.$$

- Masseträgheitsmoment ergibt sich aus der Masseverteilung des Körpers zur Drehachse
- Je näher der Schwerpunkt zur Drehachse wandert, umso kleiner wird das Trägheitsmoment
- Je weiter der Schwerpunkt sich von der Drehachse entfernt, umso größer wird das Trägheitsmoment

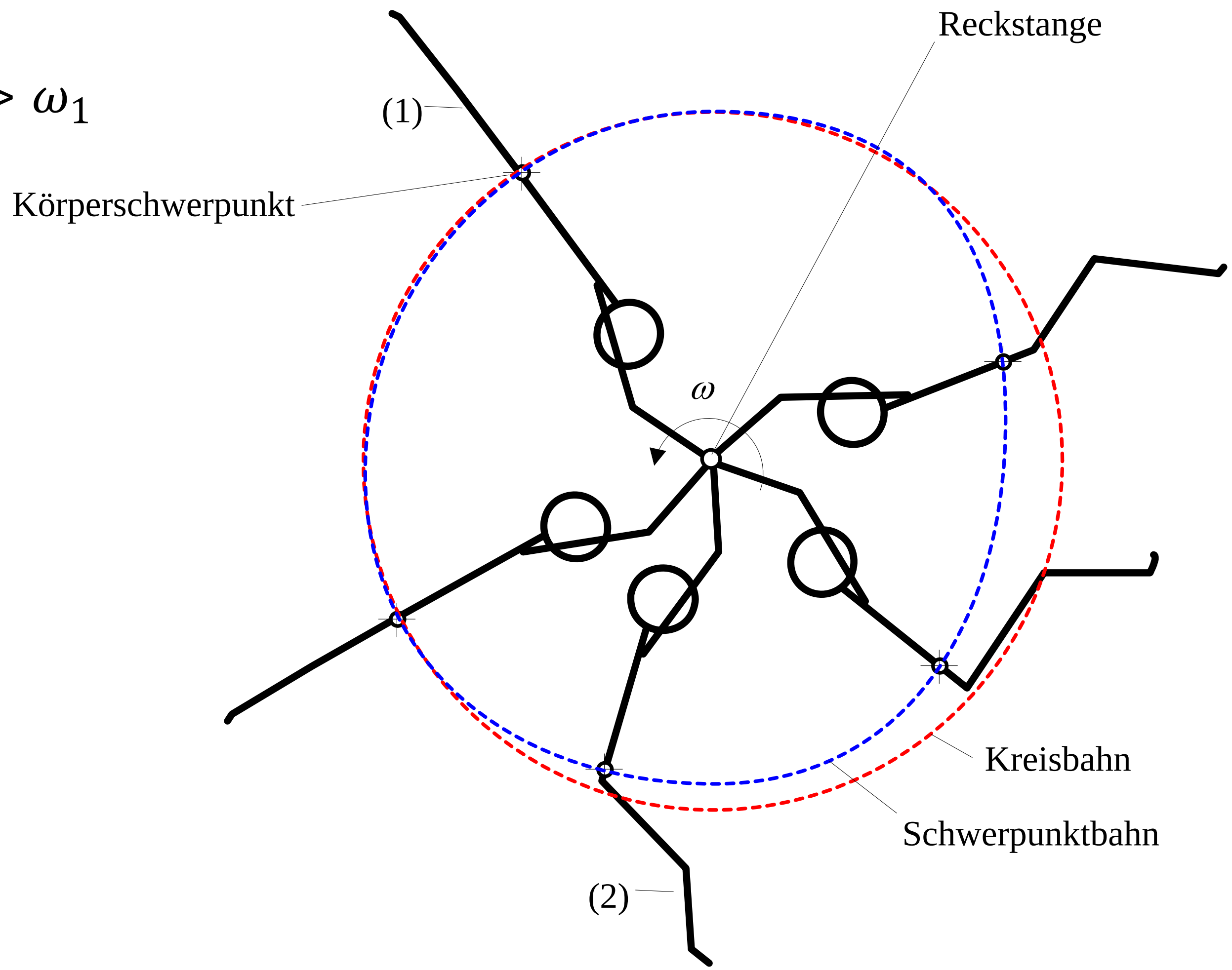
7.1 Drallerhaltung

Forderung nach einem konstanten Gesamtdrehimpuls

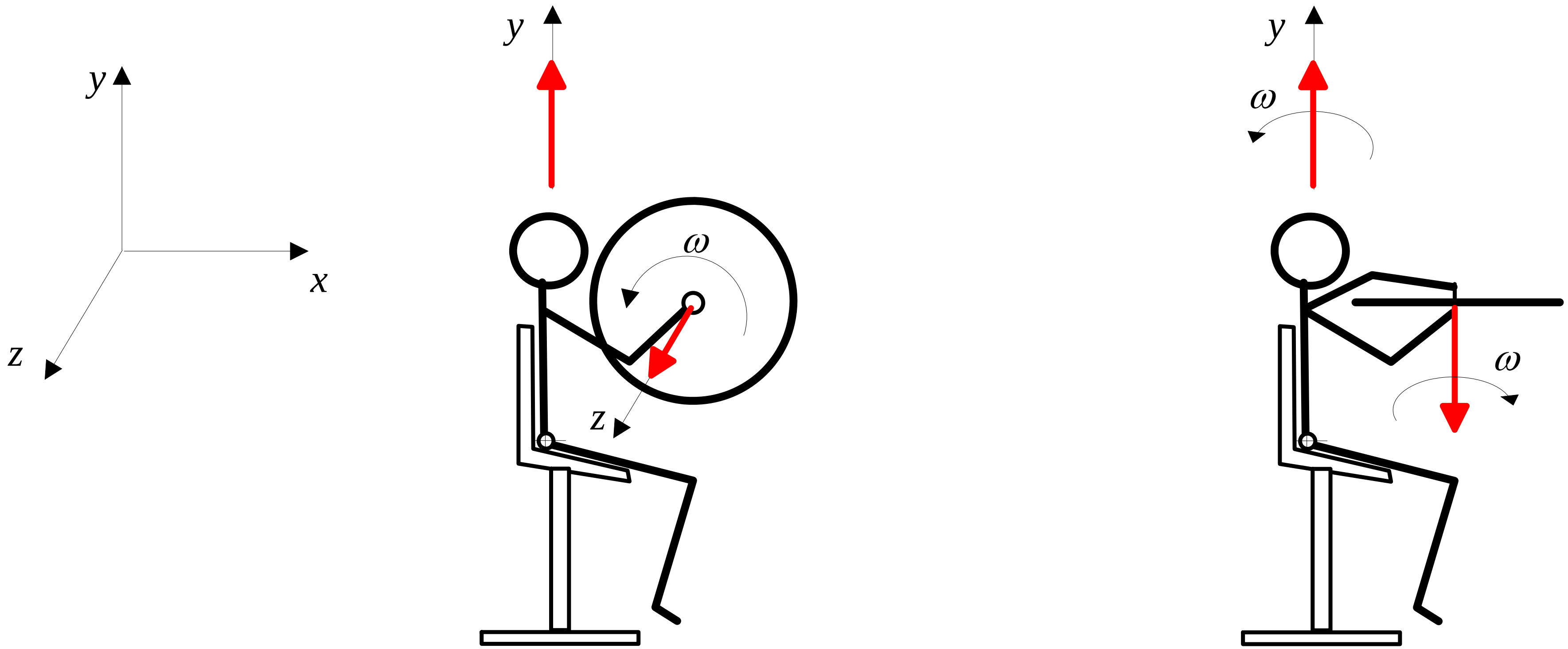
$$J_1 \cdot \omega_2 = J_2 \cdot \omega_2 = const.$$

bzw.

$$J_2 < J_1 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$



7.1 Drallerhaltung



a) Rad rotiert parallel zur z-Achse b) Rad rotiert parallel zur y-Achse

7.1 Drallerhaltung

Einfluss der Drehimpulserhaltung bei Wetterphänomenen – Tornado

Voraussetzung für die Entstehung eines Tornados

- Zusammentreffen einer trocken-kalten Luftmasse mit einer feucht-warmen Luftmasse
- Kalte Luft schiebt sich trotz ihrer größeren Dichte über die warme Luftmasse
- Instabile Schichtung mit großem vertikalem Temperaturunterschied
- Kalte Luft hat eine wesentlich geringere Fähigkeit Feuchtigkeit aufzunehmen als warme Luft
- Kondensation des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes
- Bildung von Wolken mit starkem Niederschlag
- Kondensation setzt zusätzliche Wärme frei
- Ausbildung einer nach oben gerichteten Luftbewegung

7.1 Drallerhaltung

Einfluss der Drehimpulserhaltung bei Wetterphänomenen – Tornado

- Frei werdende Energie entspricht der Verdampfungsenthalpie, die zuvor für den Phasenwechsel des Wassers aufgewendet wurde
- Am Boden bildet die horizontal nachströmende Luft infolge der Corioliskraft auf der Nordhalbkugel einen linksdrehenden Wirbel
- Auf der Südhalbkugel bildet sich entsprechend ein rechtsdrehender Wirbel
- Große Rotationsgeschwindigkeit im Wirbelkern ergibt sich aufgrund der Drehimpulserhaltung
- Hohe Drehgeschwindigkeiten bewirken Zentrifugalkräfte und hohe Unterdrücke im Zentrum des Wirbels
- Oben liegende Kaltluft wird jetzt, infolge des Unterdrucks im Wirbelkern und ihrer größeren Dichte als die der unten liegenden Warmluft, nach unten gesaugt
- Auskondensierte Feuchte aus der feucht-warmen Luft bewirkt „dunklen Rüssels" des Tornados von der Gewitterwolke auf den Erdboden

7.2 Anwendung des Drallsatzes auf Strömungsmaschinen

Drallentstehung

- Umlenkung der Strömung an einem Leitblech oder einer Schaufel
- Fluid erhält zur translatorischen noch eine rotatorische Bewegung

Anwendung – Strömungsmaschinen

- Maschinen, die einer Strömung Energie zuführen (Kompressor)
- Maschinen, die aus einer Strömung Energie abführen (Turbine)

7.2 Anwendung des Drallsatzes auf Strömungsmaschinen

Unterteilung in Abhängigkeit von der Bauform

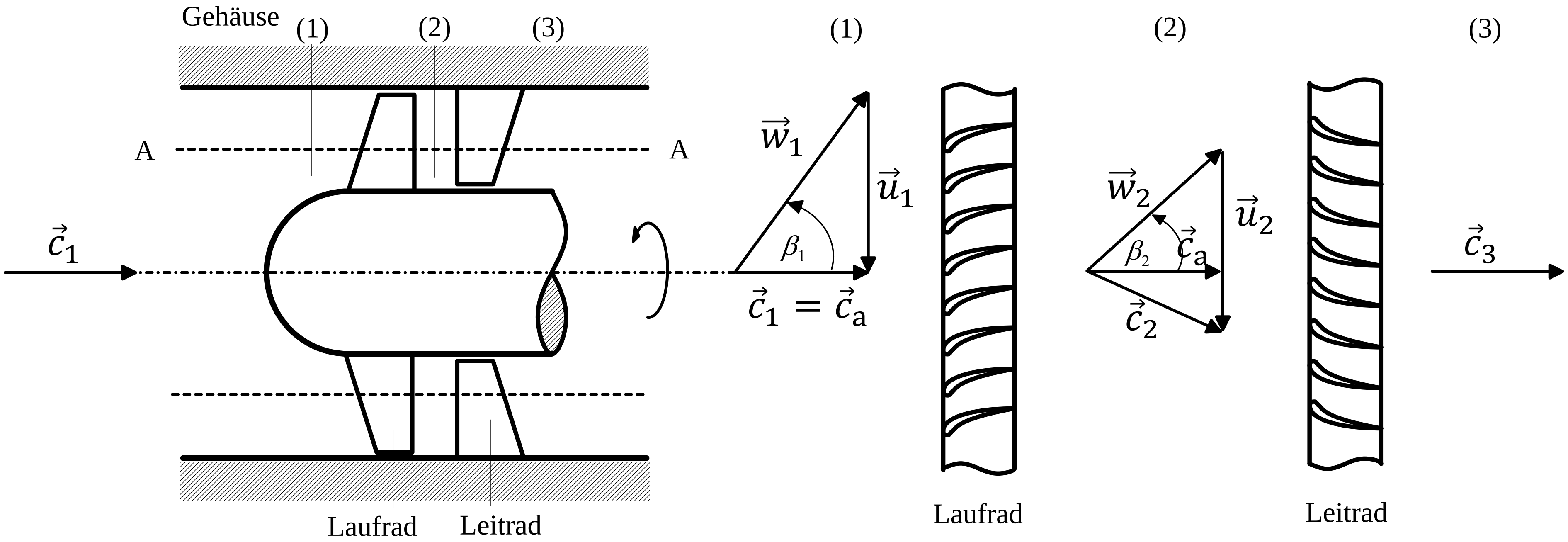
➢ Axial durchströmte Maschinen

- Hohe Strömungsgeschwindigkeiten
- Hohe Masseströme
- Geringe Druckänderungen

➢ Radial durchströmte Maschinen

- Hohe Druckänderungen
- Relativ geringe Strömungsgeschwindigkeiten

7.2 Drall am Beispiel einer axialen Strömungsmaschine



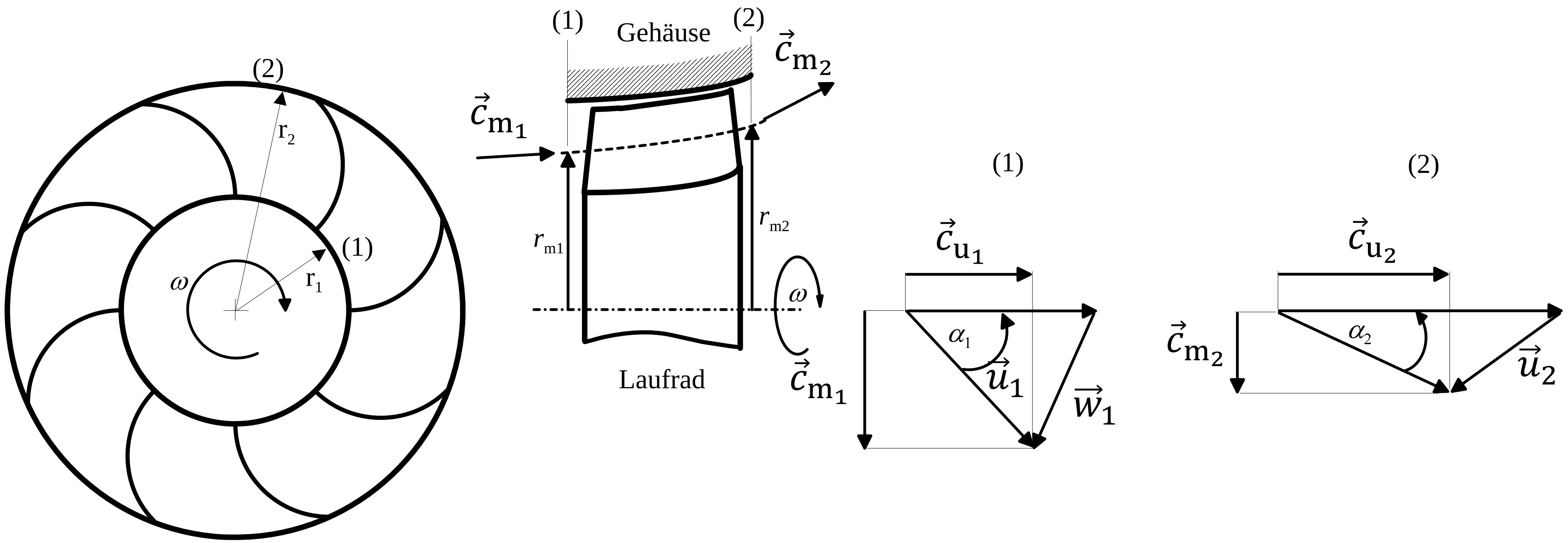
a) Schnitt durch eine Stufe

b) Abwicklung des koaxialen Schnitts

7.2.1 Drall am Beispiel einer axialen Strömungsmaschine

- Strömung bewegt sich mit der axialen Geschwindigkeit c_1 in der Ebene (1) auf das Laufrad zu, das sich mit der Umfangsgeschwindigkeit u_1 dreht
- Damit ergibt sich für die Strömung die Relativgeschwindigkeit w_1 zum Laufrad, das unter dem Winkel β_1 angeströmt wird
- Strömung hat nun zusätzlich zur translatorischen Geschwindigkeit eine rotatorische Komponente, also einen Drall
- Stromabwärts des Laufrads, in der Ebene (2), wird die Strömung um den Winkel β_2 umgelenkt und hat zum Laufrad die Relativgeschwindigkeit w_2
- Feststehende Leitrad hat die Aufgabe die Strömung wieder in axialer Richtung umzulenken
- Axiale Geschwindigkeitskomponente c_a bleibt in allen drei Ebenen konstant
- Druckanstieg ergibt sich im Wesentlichen durch das Laufrad, da hier die Relativgeschwindigkeit von w_1 auf w_2 verzögert
- Die anschließende Umlenkung in radialer Richtung durch das Leitrad bewirkt weitere Verzögerung der Relativgeschwindigkeit und damit einen zusätzlichen Druckanstieg in Strömungsrichtung

7.2.2 Drall am Beispiel einer radialen Strömungsmaschine



Laufrad eines Radialverdichters

7.2.2 Drall am Beispiel einer radialen Strömungsmaschine

- Vom Laufrad auf das Fluid übertragene Leistung P_{12} ergibt sich aus mittlerem Radius r_{m} der Stromfläche
- Stromfläche A berechnet sich aus den Radien r_1 und r_2 entsprechend

$$A = \pi \cdot {r_2}^2 - \pi \cdot {r_1}^2 = \pi \cdot {r_m}^2$$

mit

$$r_m = \sqrt{{r_2}^2 - {r_1}^2}$$

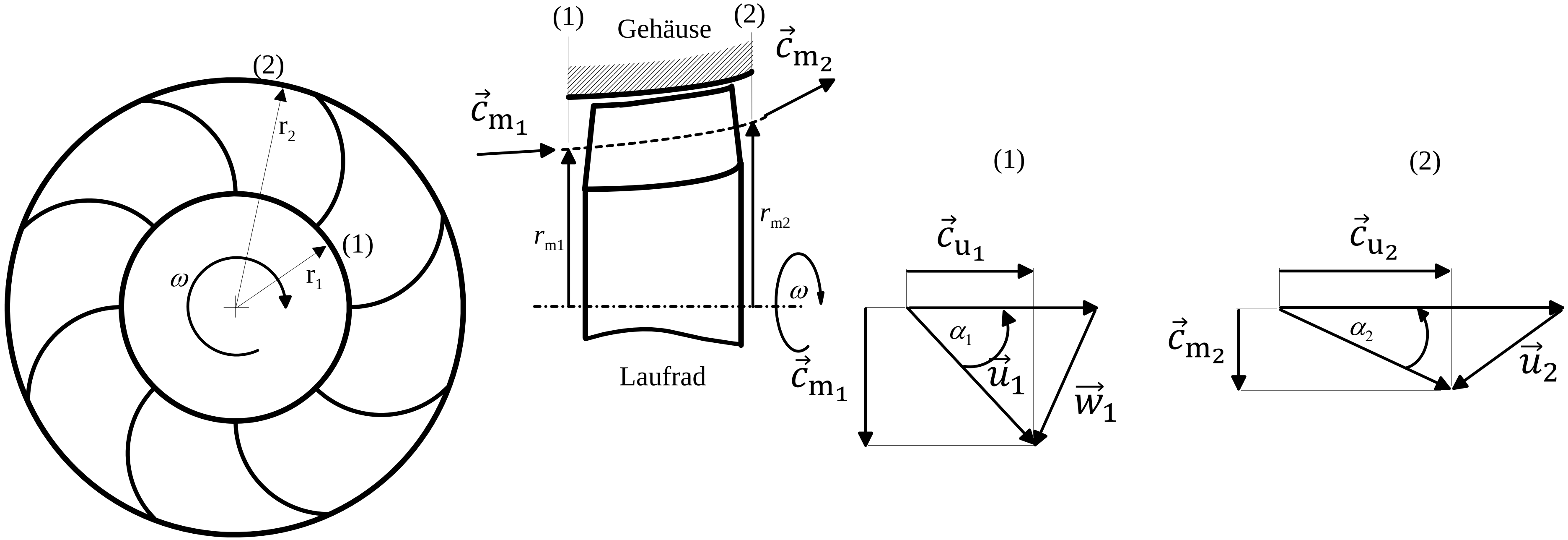
- Mit der Umfangsgeschwindigkeit $u = r \cdot \omega$ergibt sich für die auf das mit ω rotierende Laufrad übertragene Leistung

$$P_{12} = M \cdot \omega = \dot{m} \cdot \left(r_{\mathrm{m}_2} \cdot c_{\mathrm{u}_2} - r_{\mathrm{m}_1} \cdot c_{\mathrm{u}_1}\right) \cdot \omega = \dot{m} \cdot \left(u_{\mathrm{m}_2} \cdot c_{\mathrm{u}_2} - u_{\mathrm{m}_1} \cdot c_{\mathrm{u}_1}\right)$$

- Auf den Massestrom bezogene Leistung = spezifische technische Arbeit $w_{\mathrm{t},12}$ oder auch Y

$$\frac{P_{12}}{\dot{m}} = w_{\mathrm{t}_{12}} = u_{\mathrm{m}_2} \cdot c_{\mathrm{u}_2} - u_{\mathrm{m}_1} \cdot c_{\mathrm{u}_1} = Y$$

Übung 7-1



Laufrad eines Radialverdichters

Übung 7-1

Für das skizzierte Laufrad einer einstufigen Pumpe gilt

Zu- und Abströmgeschwindigkeit:	c_1 = 20 m/s, c_2 = 40 m/s
Strömungswinkel:	α_1 = 75°, α_2 = 25°
Laufradabmessungen:	$r_{m,1}$ = 0,07 m, $r_{m,2}$ = 0,1 m
Massenstrom:	$\dot{m}$ = 50 kg/s
Drehzahl:	n = 1200 min^{-1}
Gesamtwirkungsgrad:	η_P = 65%

1. Berechnen Sie das Moment M, das das Laufrad auf die Strömung ausübt

2. Berechnen Sie die aufgenommene Leistung P_{ges} der Pumpe

3. Berechnen Sie die spezifische technische Arbeit $w_{t,12}$, die die Pumpe an die Strömung abgibt