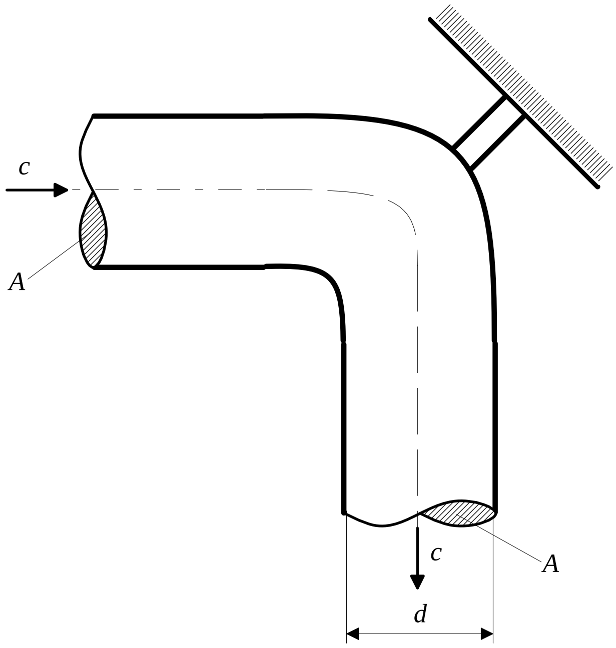
Übung 6-1

Betrachten Sie den skizzierten 90°-Rohrkrümmer mit konstantem Querschnitt. Dieser wird stationär mit der Geschwindigkeit $c_1 = c_2 = c$ durchströmt. Der Krümmer liegt horizontal. Ein- und Austrittsfläche sind gleich groß. Sie können die Annahme treffen, dass die Halterung die Gewichtskraft des Rohrkrümmer mit Fluid im statischen Fall aufnehmen kann, d.h. $F_G = 0$.

Berechnen Sie die zusätzliche Haltekraft $\vec{F}_H$, die der Halter an der Wand aufnehmen muss, wenn folgende Größen gegeben sind:

- Umgebungsdruck $p_a = 1$ bar
- statischer Druck im Eintrittsquerschnitt $p_1 = 2{,}3$ bar
- Strömungsgeschwindigkeit $c = 10$ m/s
- Dichte $\rho = 10^3$ kg/m³
- Rohrinnendurchmesser $d = 30$ mm



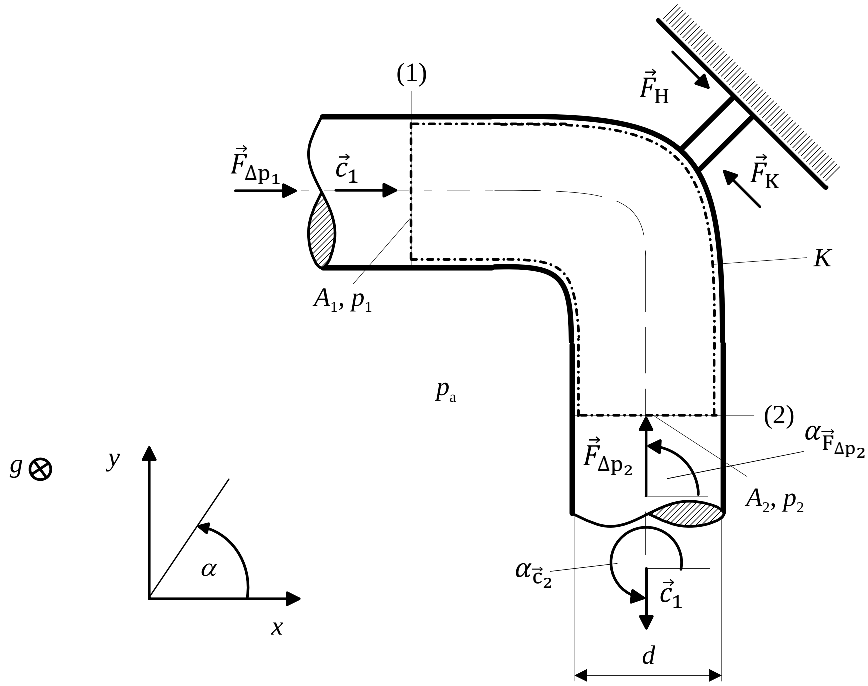
1. Definieren Sie einen Kontrollraum für das Problem

2. Identifizieren Sie alle Ein- und Austrittsebenen.

3. Tragen Sie an allen Ein- und Austrittsflächen die Vektoren für die Geschwindigkeit und die Druckkraft ein.

4. Tragen Sie den Vektor für die Gewichtskraft des Fluids ein:

Entfällt, da senkrecht zur Strömungsrichtung



5. Bestimmen Sie die Winkel zu den Geschwindigkeitsvektoren und den Vektoren der Druckkraft.

$$\alpha_{\vec{c}_1} = 0, \alpha_{\vec{c}_2} = \frac{3}{2} \cdot \pi, \alpha_{\vec{F}_{\Delta p_1}} = 0, \alpha_{\vec{F}_{\Delta p_2}} = \frac{1}{2} \cdot \pi$$

6. Bestimmen Sie zur Berechnung des Massestroms und der Druckkräfte für alle Ein- und Austrittsebenen den statischen Druck *p* und die Geschwindigkeit *c*.

$$c_1 = c_2 = c = 10 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A = 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}03^2 = 7{,}069 \text{ kg/s}$$

$$F_{\Delta p_1} = (p_1 - p_a) \cdot A_1 = (2{,}3 - 1) \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}03^2 = 92 \text{ N}$$

Berechnung des statischen Drucks p_2 mittels der Bernoulli-Gleichung, Bilanz von (1) nach (2):

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

Wegen $c_1 = c_2$ und $z_1 = z_2$ (horizontale Lage gilt $p_1 = p_2 = 2{,}3$ bar Somit ergibt sich für $F_{\Delta p_1} = F_{\Delta p_2} = 92$ N

7. Setzen Sie die Impulsgleichung für die Körperkraft in *x*- und *y*-Richtung entsprechend dem vorherigen Kapitel an.

Berechnung der Körperkraft $\vec{F}_{\mathrm{K}}$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\dot{m} \cdot \left(c_{2_\mathrm{x}} - c_{1_\mathrm{x}}\right) + F_{\Delta \mathrm{p}_{1_\mathrm{x}}} + F_{\Delta \mathrm{p}_{2_\mathrm{x}}}$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\dot{m} \cdot \left(c_2 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}\right) + F_{\Delta \mathrm{p}_1} \cdot cos\alpha_{\Delta \mathrm{p}_1} + F_{\Delta \mathrm{p}_2} \cdot cos\alpha_{\Delta \mathrm{p}_2}$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\dot{m} \cdot (-c) + F_{\Delta \mathrm{p}_1} = 7{,}069 \cdot 10 + 92 = 163 \text{ N}$$

$$F_{\mathrm{K_y}} = -\dot{m} \cdot \left(c_{2_\mathrm{y}} - c_{1_\mathrm{y}}\right) + F_{\Delta \mathrm{p}_{1_\mathrm{y}}} + F_{\Delta \mathrm{p}_{2_\mathrm{y}}}$$

$$F_{\mathrm{K_y}} = -\dot{m} \cdot \left(c_2 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1}\right) + F_{\Delta \mathrm{p}_1} \cdot sin\alpha_{\Delta \mathrm{p}_1} + F_{\Delta \mathrm{p}_2} \cdot sin\alpha_{\Delta \mathrm{p}_2}$$

$$F_{\mathrm{K_y}} = -\dot{m} \cdot (-c) + F_{\Delta \mathrm{p}_2} = 7{,}069 \cdot 10 + 92 = 163 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{K_x}} \\ F_{\mathrm{K_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163 \\ 163 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Berechnung der Haltekraft $\vec{F}_{\mathrm{H}}$

$$\vec{F}_{\mathrm{H}} = -\vec{F}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} -F_{\mathrm{K_x}} \\ -F_{\mathrm{K_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -163 \\ -163 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Übung 6-2

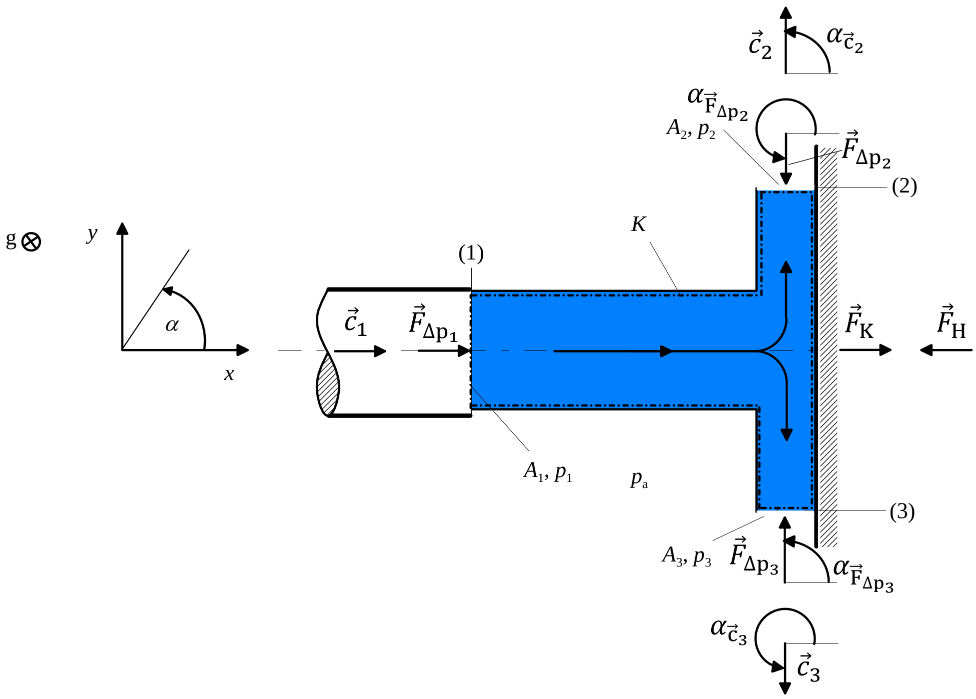
Aus einem horizontalen Rohr tritt ein Wasserstrahl aus, trifft auf eine Platte und teilt sich dort in zwei gleich große Teilstrahlen auf. Gesucht ist die Körperkraft auf die Platte und die erforderliche Haltekraft.

Wie ändern sich diese Kräfte, wenn die Platte um einen Winkel φ gegenüber der Ausströmrichtung aus dem Rohr gedreht wird?

Gegeben sind folgende Größen:

- Umgebungsdruck $p_\mathrm{a} = 1$ bar
- Strömungsgeschwindigkeit $c = 10$ m/s
- Dichte $\rho = 10^3$ kg/m³
- Rohrinnendurchmesser $d = 30$ mm
- Neigungswinkel der Platte $\varphi = 0°, 10°$

1. Definieren Sie einen Kontrollraum und ein geeignetes Koordinatensystem. Tragen Sie die auftretenden Kräfte und die Winkel der Vektoren ein.



2. Bestimmen Sie die zu den Vektoren gehörenden Winkel

$\alpha_{\vec{c}_1} = 0,\ \alpha_{\vec{c}_2} = \frac{1}{2} \cdot \pi,\ \alpha_{\vec{c}_3} = \frac{3}{2} \cdot \pi,\ \alpha_{\vec{F}_{\Delta p_1}} = 0,\ \alpha_{\vec{F}_{\Delta p_2}} = \frac{3}{2} \cdot \pi\ ,\ \alpha_{\vec{F}_{\Delta p_3}} = \frac{1}{2} \cdot \pi$

Die Gewichtskraft des Wasserstrahls hat keinen Einfluss, da der Strahl horizontal verläuft und senkrecht auf dem Vektor der Erdbeschleunigung steht.

3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten, die Masseströme und die Druckkräfte in der Eintrittsebene und den Austrittsebenen.

Geschwindigkeiten

Die Berechnung der Geschwindigkeiten erfolgt mittels einer Druckbilanz nach Bernoulli von (1) nach (2) beziehungsweise nach (3).

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

und

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_3}^2 + \rho \cdot g \cdot z_3 + p_3$$

Der potentielle Anteil $\rho \cdot g \cdot z$ entfällt aufgrund der horizontalen Lage, also gilt $z_1 = z_2 = z_3$. Da es sich um einen Freistrahl handelt prägt sich der äußere Umgebungsdruck auf den statischen Druck im Strahl auf, es gilt $p_1 = p_2 = p_3 = p_a$.

Die Bilanz vereinfacht sich somit zu

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_3}^2$$

also

$$c_1 = c_2 = c_3 = c = 10\,\mathrm{m/s}$$

Masseströme

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot c \cdot A = 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}03^2 = 7{,}069\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \frac{1}{2} \cdot \dot{m}_1 = 3{,}535\,\mathrm{kg/m^3}$$

Druckkräfte

Da der statische Druck im Strahl dem äußeren Umgebungsdruck entspricht entfallen alle Druckkräfte. Es gilt also

$$\vec{F}_{\Delta \mathrm{p}_1} = \vec{F}_{\Delta \mathrm{p}_2} = \vec{F}_{\Delta \mathrm{p}_3} = 0$$

4. Bestimmen Sie die Körperkraft $\vec{F}_\mathrm{K}$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\left[\left(\dot{m}_2 \cdot c_{2_\mathrm{x}} + \dot{m}_3 \cdot c_{3_\mathrm{x}}\right) - \dot{m}_1 \cdot c_{1_\mathrm{x}}\right]$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\left[\left(\dot{m}_2 \cdot c_2 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_2} + \dot{m}_3 \cdot c_3 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_3}\right) - \dot{m}_1 \cdot c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}\right]$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = \dot{m}_1 \cdot c = 7{,}069 \cdot 10 = 71\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{K_y}} = -\left[\left(\dot{m}_2 \cdot c_{2_\mathrm{y}} + \dot{m}_3 \cdot c_{3_\mathrm{y}}\right) - \dot{m}_1 \cdot c_{1_\mathrm{y}}\right]$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\left[\left(\dot{m}_2 \cdot c_2 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} + \dot{m}_3 \cdot c_3 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_3}\right) - \dot{m}_1 \cdot c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1}\right]$$

$$F_{\mathrm{K_y}} = 0$$

$$\vec{F}_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{K_x}} \\ F_{\mathrm{K_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 0 \end{bmatrix}\ \mathrm{N}$$

Berechnung der Haltekraft $\vec{F}_\mathrm{H}$

$$\vec{F}_\mathrm{H} = -\vec{F}_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} -F_{\mathrm{K_x}} \\ -F_{\mathrm{K_y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -71 \\ 0 \end{bmatrix}\ \mathrm{N}$$

Dieser Lösungsweg entspricht dem Lösungsschema für Impulsaufgaben. Sie können diese Aufgabe aber wesentlicher schneller durch reine Anschauung lösen.

Impulskraft in *x*-Richtung

In dieser Richtung liegt an der Grenze des Kontrollraums an der Stelle (1) der Eintrittsimpulsstrom $\dot{m}_1 \cdot c_{1_\mathrm{x}}$ an. Ein Austrittsimpuls ist nicht vorhanden, da in dieser Richtung kein Massestrom aus dem Kontrollraum austritt.

Impulskraft in *y*-Richtung

In der Eintrittsebene (1) tritt in dieser Richtung kein Massestrom in das System ein. Lediglich in den beiden Austrittsebenen (2) und (3) liegen die beiden Impulsströme $\dot{m}_2 \cdot c_{2_\mathrm{y}}$ und $\dot{m}_3 \cdot c_{3_\mathrm{y}}$ vor. Die Masseströme $\dot{m}_2$ und $\dot{m}_3$ sind identisch. Ebenso sind die Geschwindigkeitskomponenten c_{2_y} und c_{3_y} betragsmäßig gleich, jedoch entgegengesetzt gerichtet. das heißt, dass diese beiden Impulsströme betragsmäßig gleich sind, jedoch mit entgegengesetzter Richtung. Sie müssen sich also gegenseitig kompensieren. Somit kann in *y*-Richtung keine Kraftwirkung auftreten.

Die gesamte Kraft kann also nur aus dem Eintrittsimpuls in *x*-Richtung bestehen und der lautet ganz einfach

$$F_{\mathrm{K_x}} = \dot{m}_1 \cdot c$$

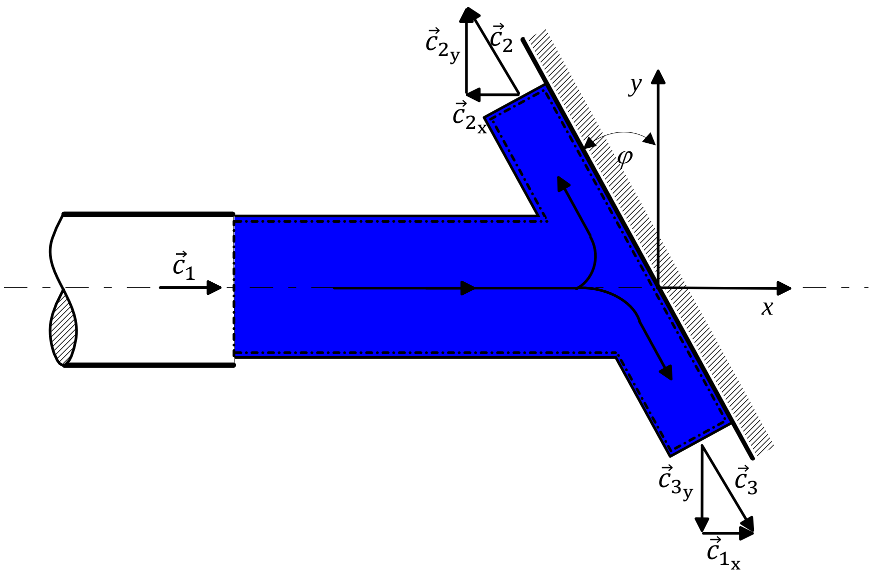
5. Drehung der Platte um den Winkel φ gegenüber der *y*-Achse

Zum Abschluss noch zu der Frage, was passiert, wenn die Platte gegenüber der *y*-Richtung um den Winkel φ gedreht wird. Auch diese Frage können Sie direkt aus der Anschauung heraus beantworten.

An dem Eintrittsimpulsstrom in *x*-Richtung ändert sich nichts. Ein Austrittsimpulsstrom in *x*-Richtung ist aber nun in Form von $\dot{m}_2 \cdot c_{2_\mathrm{x}}$ und $\dot{m}_3 \cdot c_{3_\mathrm{x}}$. Die Geschwindigkeitskomponenten c_{2_x} und c_{3_x} sind jedoch betragsmäßig gleich, jedoch entgegen gerichtet. Sie heben sich also gegenseitig auf. Es bleibt in in *x*-Richtung also alles wie zuvor bei $F_{\mathrm{K_x}} = \dot{m}_1 \cdot c$. In der Eintrittsebene liegt immer noch kein Impulsstrom in *y*-Richtung vor. In den beiden Austrittsebenen haben wir die beiden Impulsströme $\dot{m}_2 \cdot c_{2_\mathrm{y}}$ und $\dot{m}_3 \cdot c_{3_\mathrm{y}}$. Auch hier sind die beiden Geschwindigkeitskomponenten c_{2_y} und c_{3_y} wieder betragsmäßig gleich und heben sich gegenseitig auf. Somit kann keine Kraft in *y*-Richtung entstehen.

Wie zuvor besteht die gesamte Kraft nur aus dem Eintrittsimpuls in *x*-Richtung und lautet ganz einfach

$$F_{\mathrm{K_x}} = \dot{m}_1 \cdot c$$

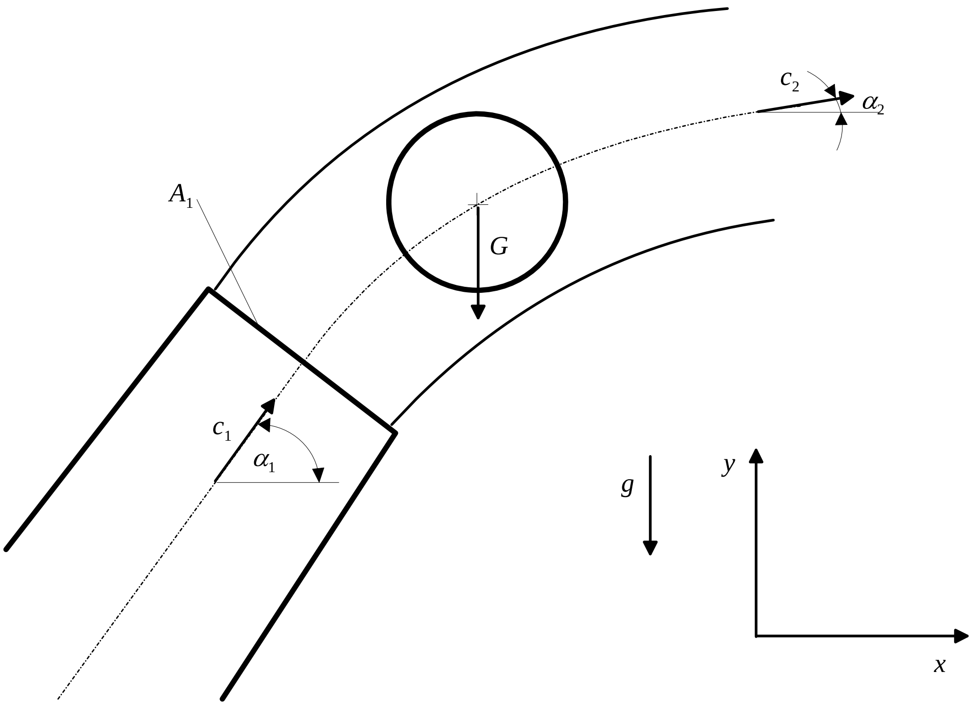


Dieses Ergebnis behält natürlich nur solange seine Gültigkeit, solange es sich um kleine Auslenkungswinkel φ handelt. Bei Überschreiten eines bestimmten Grenzwinkels wird der Strahl in sich selbst hinein gedreht und die Annahme, dass der Strahl sich gleichmäßig in zwei gleich große Teilstrahlen aufteilt ist dann nicht mehr zu halten.

Übung 6-3

Ein Tischtennisball kann durch einen ihn umströmenden Luftfreistrahl so in der Schwebe gehalten werden, dass er sich nicht zu bewegen scheint. Dazu muss eine Kraft aufgebracht werden, die bei richtiger Abstimmung aller Größen in der Lage ist, das Gewicht des Balls zu kompensieren. Das Eigengewicht des Luftstrahls kann vernachlässigt und die Strömung kann als stationär und inkompressibel betrachtet werden.

Setzen Sie den Eintrittsquerschnitt A_1, die Geschwindigkeit c_1 und den Winkel α_1 sowie das Gewicht G des Balls als bekannt voraus.



1. Berechnen Sie die Reaktionskraft R_x auf den Tischtennisball in *x*-Richtung.

Die Reaktionskraft $\vec{R}$ entspricht der Körperkraft $\vec{F}_K$. Da der Ball an der gleichen Stelle schwebt, muss diese Reaktionskraft in *x*-Richtung gleich null sein.

$$R_x = 0$$

2. Berechnen Sie die Reaktionskraft R_y auf den Tischtennisball in *y*-Richtung.

Auch hier gilt wieder das Gleiche wie bei Punkt 1: Der Ball schwebt an der gleichen Stelle. Also muss die Reaktionskraft R_y das Eigengewicht des Balls, die Gewichtskraft $\vec{G}$ kompensieren.

$$R_{W_y} = G$$

3. Berechnen Sie den Austrittswinkel $\alpha_{\vec{c}_2}$ des Luftstrahls aus den gegebenen Größen.

Da es sich um einen Freistrahl handelt entfallen alle Druckkräfte.

Für den Massestrom gilt $\dot{m} = \rho \cdot c_1 \cdot A_1$. Aus der Bedingung $R_x = 0$ folgt

$$R_\mathrm{x} = F_{\mathrm{K_x}} = -\dot{m} \cdot \left(c_{2_\mathrm{x}} - c_{1_\mathrm{x}}\right) = 0$$
$$R_\mathrm{x} = -\dot{m} \cdot \left(c_2 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}\right) = 0$$
$$c_2 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_2} = c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}$$
$$c_2 = c_1 \cdot \frac{cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}{cos\alpha_{\mathrm{c}_2}}$$

Aus der Bedingung $R_\mathrm{y} = G$ folgt

$$R_\mathrm{y} = F_{\mathrm{K_y}} = -\dot{m} \cdot \left(c_{2_\mathrm{y}} - c_{1_\mathrm{y}}\right) = G$$
$$R_\mathrm{y} = -\dot{m} \cdot \left(c_2 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1}\right) = G$$
$$c_2 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1} = -\frac{G}{\dot{m}}$$

Ersetzen von c_2 ergibt

$$c_1 \cdot \frac{cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}{cos\alpha_{\mathrm{c}_2}} \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} - c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1} = -\frac{G}{\dot{m}}$$
$$c_1 \cdot \frac{cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}{cos\alpha_{\mathrm{c}_2}} \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_2} = c_1 \cdot sin\alpha_{\mathrm{c}_1} - \frac{G}{\dot{m}}$$
$$tan\alpha_{\mathrm{c}_2} = tan\alpha_{\mathrm{c}_1} - \frac{G}{\dot{m} \cdot c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}$$
$$\alpha_{\mathrm{c}_2} = atan\left(tan\alpha_{\mathrm{c}_1} - \frac{G}{\dot{m} \cdot c_1 \cdot cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}\right)$$

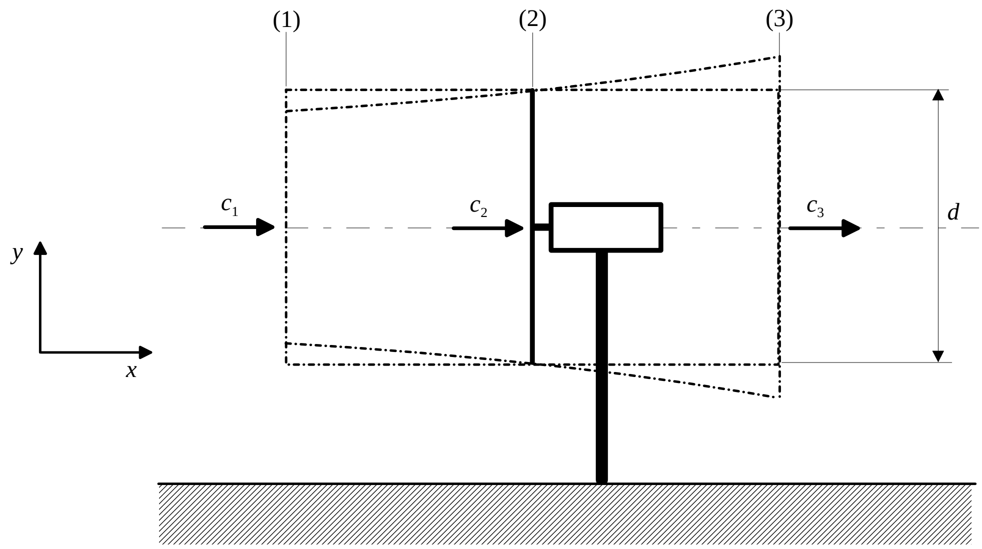
4. Bestimmen Sie die Abströmgeschwindigkeit c_2 in Abhängigkeit der gegebenen beziehungsweise berechneten Größen.

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{cos\alpha_{\mathrm{c}_1}}{cos\alpha_{\mathrm{c}_2}}$$

Übung 6-4

Zur Stromversorgung Ihrer auf h = 2000m Höhe gelegenen Berghütte beschließen Sie eine Windkraftanlage zu installieren. Im Vorfeld führen Sie über einen gesamten Jahreszyklus eine Messung der Windgeschwindigkeit am vorgesehenen Ort für das Minikraftwerk durch. Dabei ermitteln Sie eine mittlere Windgeschwindigkeit von c = 5 m/s.

Die maximale Bauteilgröße, die Sie im Tragegestell auf den Berg transportieren können beträgt l_{max} = 2 m.



1. Berechnen Sie die maximale Leistung, die Sie im Idealfall aus der Windkraftanlage entziehen können.

Windleistung

Zu Beginn der Betrachtung ist abzuschätzen, welche Leistung P_{Wind} durch den Wind überhaupt zur Verfügung gestellt wird. Relevant ist lediglich der Wind, der durch die zylindrische Stromröhre bläst, die durch den Rotordurchmesser d beschrieben wird.

$$P_{\text{Wind}} = \dot{E}_{\text{kin}} = \dot{m} \cdot \frac{{c_1}^2}{2}$$

mit

$$\dot{m} = \rho \cdot c_1 \cdot A = \rho \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

also

$$P_{\text{Wind}} = \rho \cdot {c_1}^3 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot d^2$$

Turbinenleistung

Die Leistung P_{Turbine}, die Sie über die Windkraftturbine anführen können entspricht der Energieabnahme zwischen Eintrittsebene (1) und Austrittsebene (3). Die Einschnürung der Stromröhre vor dem Rotor beziehungsweise die Aufweitung hinter dem Rotor wird durch Geschwindigkeitsabnahme in Strömungsrichtung bedingt.

$$P_{\text{Turbine}} = \Delta \dot{E}_{\text{kin}_{1-3}} = \dot{m} \cdot \frac{{c_3}^2 - {c_1}^2}{2}$$

Die Axialgeschwindigkeit c_2 am Rotor entspricht näherungsweise dem arithmetischen Mittel von Eintrittsgeschwindigkeit c_1 und Austrittsgeschwindigkeit c_3 aus dem Kontrollraum.

$$c_2 = \frac{c_1 + c_3}{2}$$

damit folgt für den Massestrom

$$\dot{m} = \rho \cdot c_2 \cdot A = \rho \cdot \frac{c_1 + c_3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

und die Turbinenleistung

$$P_{\text{Turbine}} = \dot{m} \cdot \frac{{c_3}^2 - {c_1}^2}{2} = \rho \cdot \frac{c_1 + c_3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{{c_3}^2 - {c_1}^2}{2}$$

$$P_{\text{Turbine}} = \underbrace{\rho \cdot {c_1}^3 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot d^2}_{P_{Wind}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{c_3}{c_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right)}_{c_p}$$

Somit ergibt sich für den Leistungsbeiwert der idealen Windturbine

$$c_{\text{p}} = \frac{P_{\text{Turbine}}}{P_{\text{Wind}}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{c_3}{c_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right)}_{c_{\text{p}}}$$

Maximale Turbinenleistung

Die nächste Frage, die es zu klären gilt lautet: Unter welchen Bedingungen erhalte ich die maximale Turbinenleistung. Das ergibt sich aus einer einfachen Extremwertberechnung für den Leistungsbeiwert c_{p} als Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses c_1/c_3. Oder besser: Auf welche Geschwindigkeit muss die Strömung durch den Rotor abgebremst werden um die maximale Leistung zu erhalten.

$$\frac{dc_{\text{p}}}{d\left(\frac{c_3}{c_1}\right)} = 0$$

oder

$$\frac{d\left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{c_3}{c_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right)\right]}{d\left(\frac{c_3}{c_1}\right)} = 0$$

mit

$$x = \frac{c_3}{c_1}$$

sieht die Ableitung schon gleich viel freundlicher aus.

Aus

$$\frac{d\left[\frac{1}{2}\cdot(1+x)\cdot(1-x)\right]}{dx}=0$$

beziehungsweise

$$\frac{d\left[\frac{1}{2}\cdot(1-x^2+x-x^3)\right]}{dx}=\frac{1}{2}\cdot(-2\cdot x+1-3\cdot x^2)=0$$

folgt

$$x^2+\frac{2}{3}\cdot x-\frac{1}{3}=0$$

also

$$x_{1,2}=-\frac{2}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2+\frac{1}{3}}$$

und somit für das optimale Geschwindigkeitsverhältnis

$$x_1=\frac{1}{3}=\left(\frac{c_3}{c_1}\right)_{\text{optimal}}$$

Das heißt, die maximale Turbinenleistung wird dann erzielt, wenn der Rotor die Strömung auf ein Drittel der Zuströmgeschwindigkeit abbremst. Damit ergibt sich für den optimalen Leistungsbeiwert

$$c_{\text{p}_{\text{optimal}}}=\frac{P_{\text{Turbine}}}{P_{\text{Wind}}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=0{,}593$$

Damit berechnet sich die maximal mögliche Leistung einer Windkraftanlage zu

$$P_{\text{Turbine}_{\max}}=c_{\text{p}_{\text{optimal}}}\cdot P_{\text{Wind}}=0{,}593\cdot\rho\cdot {c_1}^3\cdot\frac{\pi}{8}\cdot d^2$$

Anmerkung

Der c_p-Wert von 0,593 wird auch als „*Betz*[1]*-Faktor*“ bezeichnet und beschreibt die Leistungsgrenze einer Windkraftanlage.

Leistungsberechnung der konzipierten Windkraftanlage

Mithilfe Ihres Programms zur Berechnung der Werte der Standard-Atmosphäre (Kapitel 3, Aerostatik) können Sie sofort die Luftdichte in einer Höhe von h = 2000 m bestimmen, also ρ = 1,0 kg/m$_3$. Aufgrund der Größenbeschränkung von $l_{\max}$ = 2 m der Teile, die Sie nach oben tragen können, ergibt sich ein maximaler Rotordurchmesser von d = 4 m. Zusammen mit der mittleren Windgeschwindigkeit von c = 5 m/s ergibt sich die maximale Leistung Ihrer Windkraftanlage zu

$$P_{\text{Turbine}_{\max}}=c_{\text{p}_{\text{optimal}}}\cdot P_{\text{Wind}}=0{,}593\cdot\rho\cdot {c_1}^3\cdot\frac{\pi}{8}\cdot d^2$$

[1] **Betz**, Albert (25.12.1885 – 16.04.1968), deutscher Physiker und Aerodynamiker, Nachfolger von Ludwig Prandtl als Leiter der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen (AVA), formulierte 1920 das Betzsche Gesetz (*Betz-Faktor*) und entwickelte zusammen mit Adolf Busemann das Konzept des Pfeilflügels zur Widerstandsreduzierung bei transsonischen Geschwindigkeiten. Weitere Entwicklungen waren unter anderem das sogenannte *Betz-Manometer*.

also

$$P_{\mathrm{Turbine}_{\max}} = 0{,}593 \cdot 1{,}0 \cdot 5^3 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 4^2 = 466\ \mathrm{W}$$

Das ist nicht berauschend. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass dieser Wert noch um den mechanischen Wirkungsfaktor der Turbine und den elektrischen Wirkungsfaktor des Generators reduziert wird.

Sie sehen also, die Leistung einer Windkraftanlage lässt sich sehr einfach aus der Windgeschwindigkeit und dem Rotordurchmesser abschätzen. Letzterer wird in der Regel durch die in dem jeweiligen Bundesland gültigen Bauvorschriften begrenzt. In Bayern gilt beispielsweise die sogenannte 10xH-Regel. Das heißt, die Entfernung einer Windkraftanlage zur nächsten Ansiedlung muss mindestens das Zehnfache der Höhe der Windkraftanlage betragen. In der Realität werden Sie natürlich auch nicht 59,3% der zur Verfügung stehenden Windleistung über Ihre Windkraftanlage in elektrische Leistung umsetzen können. Ausgeführte Anlagen liegen in der Größenordnung von 35 – 40%.

2. Schubkraft auf den Rotor $F_{\mathrm{K_x}}$

Allgemein gilt

$$\vec{F}_{\mathrm{K}} = -\dot{m} \cdot (\vec{c}_3 - \vec{c}_1) + \vec{F}_{\mathrm{p_1}} + \vec{F}_{\mathrm{p_3}} + \vec{F}_{\mathrm{G}}$$

Da es sich um einen Freistrahl handelt verschwinden alle Druckkräfte. Die Gewichtskraft wirkt senkrecht zur Strömungsrichtung und kann somit keinen Beitrag liefern. In *y*-Richtung liegt weder ein Eintritts- noch ein Austrittsimpulsstrom vor.

Für die Körperkraft F_{K_x} in *x*-Richtung bleibt lediglich

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\dot{m} \cdot (c_3 - c_1) = \rho \cdot \frac{c_1 + c_3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot (c_3 - c_1)$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot (c_1 + c_3) \cdot (c_3 - c_1)$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \left(1 + \frac{c_3}{c_1}\right) \cdot \left(\frac{c_3}{c_1} - 1\right)$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$F_{\mathrm{K_x}} = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 139{,}6\ \mathrm{N}$$