

6. Impulssatz

6.1 Newtonsche Axiome

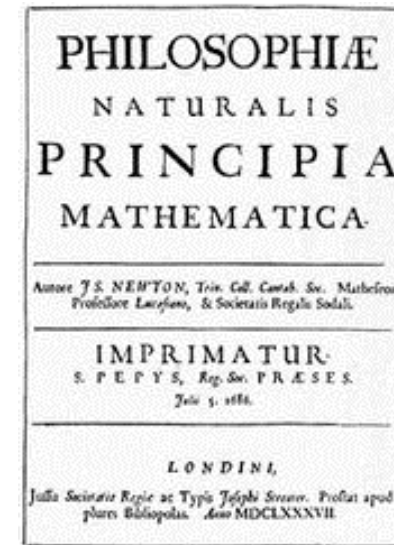
6.2 Impuls

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

6.4 Anwendungsprinzip des Impulssatzes

6.1 Newtonsche Axiome

Sir Isaac Newton



- 04.01.1643 - 31.03.1727 (gregorianischer Kalender)
eingeführt 1583 durch Papst Gregor XIII
- 25.12.1642 - 20.03.1727 (julianischer Kalender)
England bis 1752, Russland bis zur Oktoberrevolution 1917
- Formulierung seiner drei Axiome 1687 in
'Philosophiæ Naturalis Principia Matheamtica'
(Mathematische Grundlagen der Naturphilosophie)

6.1 Newtonsche Axiome

➤ Erstes Newtonsches Axiom „*Trägheitsprinzip*“

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte Null ist

➤ Zweites Newtonsches Axiom „*Aktionsprinzip*“, „*dynamisches Grundgesetz*“

Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in die Richtung, in die die Kraft wirkt

➤ Drittes Newtonsches Axiom „*Reaktionsprinzip*“

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio)

6.2 Impuls

- Produkt aus Masse und Geschwindigkeit wird als *Impuls* bezeichnet

$$m \cdot \vec{c}$$

- Zweites Newtonsches Axiom (dynamisches Grundgesetz)

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{c})}{dt}$$

Rechte Seite

- Zeitliche Ableitung der Änderung der Bewegungsgröße $m \cdot \vec{c}$

Linke Seite

- Kraft \vec{F} , die entsprechend dem zweiten Newtonschen Axiom der Änderung der Bewegungsgröße entspricht
- Bei konstanter Masse gilt

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{c}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

6.2 Impuls

Impuls \vec{I}

= Integration der Kraft über die Zeit

$$\int \vec{F} \cdot dt = m \cdot \vec{c} = \vec{I}$$

Impulsstrom $\vec{\dot{I}}$

= Zeitliche Änderung des Impulses

$$\vec{\dot{I}} = \frac{d(m \cdot \vec{c})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{c}}{dt} + \vec{c} \cdot \frac{dm}{dt} = m \cdot \vec{\dot{c}} + \dot{m} \cdot \vec{c}$$

Vereinfachung für stationäre Strömungen, $\vec{\dot{c}} = 0$

$$\vec{\dot{I}} = \dot{m} \cdot \vec{c}$$

6.2 Impuls

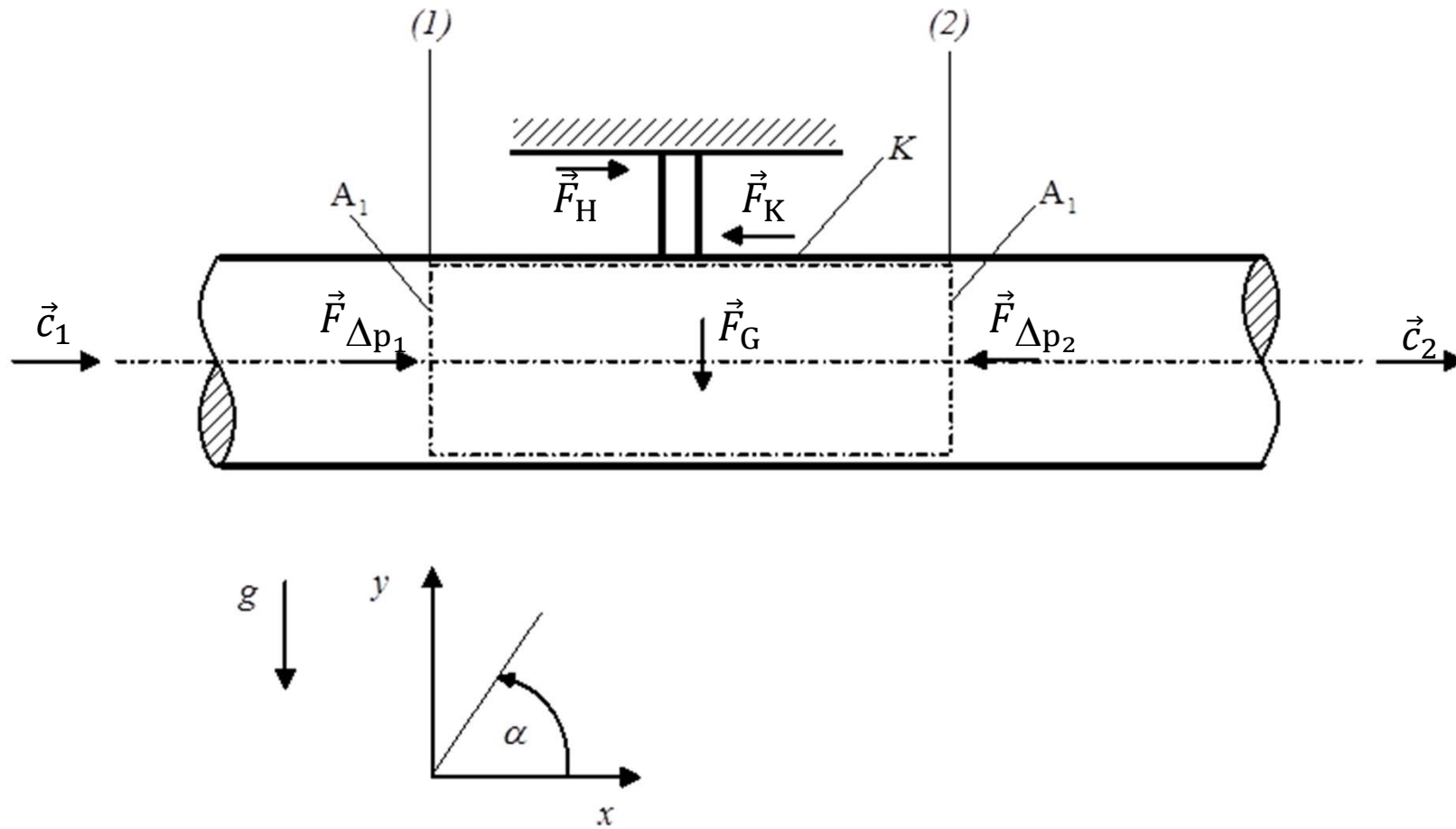
Dynamisches Grundgesetz

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{c})}{dt} = \vec{I}$$

Impulssatz, allgemeine Form

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{I}$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum



6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Eintrittsquerschnitt (1)

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1$$

Austrittsquerschnitt (2)

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2$$

Inkompressibles Fluid

$$\rho_1 = \rho_2$$

Konstanter Rohrquerschnitt

$$A_1 = A_2$$

Also gilt

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

und

$$c_1 = c_2 = c$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Analyse der Kräfte

Ein- und Austrittsflächen

➤ *Impulskraft*

$$\vec{F} = \dot{m} \cdot \vec{c}$$

➤ *Druckkraft* $\vec{F}_{\Delta p}$

$$\vec{F}_{\Delta p} = (p_i - p_a) \cdot A$$

mit

p_a äußerer Umgebungsruck

p_i statischer Druck in der Strömung

A Strömungsquerschnitt

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Druckkräfte

- Strahl tritt in die freie Umgebung aus (Fontäne eines Springbrunnens)
- Äußerer Umgebungsdruck wird dem austretenden Strahl aufgeprägt
- Druckkraft verschwindet (*Freistrahلبedingung*)

$$p_i = p_a$$
$$\vec{F}_{\Delta p} = (p_i - p_a) \cdot A = 0$$

Gewichtskraft

- Masse des Fluids, das sich innerhalb des Kontrollraums befindet ergibt eine *Gewichtskraft* \vec{F}_G
- Bei Gasen kann dieser Beitrag zur Kräftebilanz vernachlässigt werden

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Körperkraft

- Kraft des Fluides auf die Kontrollfläche K
- Körperkraft \vec{F}_K

Haltekraft

- Haltekraft \vec{F}_H wirkt der Körperkraft \vec{F}_K entgegen

Beispiel Flugzeugtriebwerk

- Körperkraft = Schubkraft des Triebwerks
- Haltekraft = Kraft, die der Treibwerkspylon aufnehmen muss

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Kräftebilanz

Horizontales, gerades Rohrstücks mit konstantem Querschnitt

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{\dot{I}}$$

oder

$$\vec{F}_{\Delta p_1} + \vec{F}_{\Delta p_2} - \vec{F}_K + \vec{F}_G = \vec{\dot{I}}_2 - \vec{\dot{I}}_1$$

Reibung infolge der an der Wand auftretenden Schubspannung wurde vernachlässigt

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Kräftebilanz

Bestimmung der Körperkraft \vec{F}_K oder der Haltekraft $\vec{F}_H = -\vec{F}_K$

$$\vec{F}_K = -\left(\vec{I}_2 - \vec{I}_1\right) + \vec{F}_{\Delta p_1} + \vec{F}_{\Delta p_2} + \vec{F}_G$$

bzw.

$$\vec{F}_K = -\dot{m} \cdot (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) + \vec{F}_{\Delta p_1} + \vec{F}_{\Delta p_2} + \vec{F}_G$$

Zweidimensionaler Fall

$$F_{K_x} = -\dot{m} \cdot (c_{2_x} - c_{1_x}) + F_{\Delta p_{1_x}} + F_{\Delta p_{2_x}} + F_{G_x}$$

$$F_{K_y} = -\dot{m} \cdot (c_{2_y} - c_{1_y}) + F_{\Delta p_{1_y}} + F_{\Delta p_{2_y}} + F_{G_y}$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Kräftebilanz

Bestimmung der Körperkraft \vec{F}_K oder der Haltekraft $\vec{F}_H = -\vec{F}_K$

$$F_{K_x} = -\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \cos\alpha_{c_2} - c_1 \cdot \cos\alpha_{c_1}) + F_{\Delta p_1} \cdot \cos\alpha_{\Delta p_1} + F_{\Delta p_2} \cdot \cos\alpha_{\Delta p_2} + F_G \cdot \cos\alpha_G$$

$$F_{K_y} = -\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \sin\alpha_{c_2} - c_1 \cdot \sin\alpha_{c_1}) + F_{\Delta p_1} \cdot \sin\alpha_{\Delta p_1} + F_{\Delta p_2} \cdot \sin\alpha_{\Delta p_2} + F_G \cdot \sin\alpha_G$$

Winkel entsprechend dem Koordinatensystem

$$\alpha_{c_1} = 0, \alpha_{c_2} = 0, \alpha_{\Delta p_1} = 0, \alpha_{\Delta p_2} = \pi, \alpha_G = 3/2 \cdot \pi$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Kräftebilanz

Bestimmung der Körperkraft \vec{F}_K oder der Haltekraft $\vec{F}_H = -\vec{F}_K$

$$F_{K_x} = -\dot{m} \cdot (c_2 - c_1) + F_{\Delta p_1} - F_{\Delta p_2}$$

$$F_{K_y} = F_G$$

Konstanter Querschnitt

$$c_1 = c_2$$

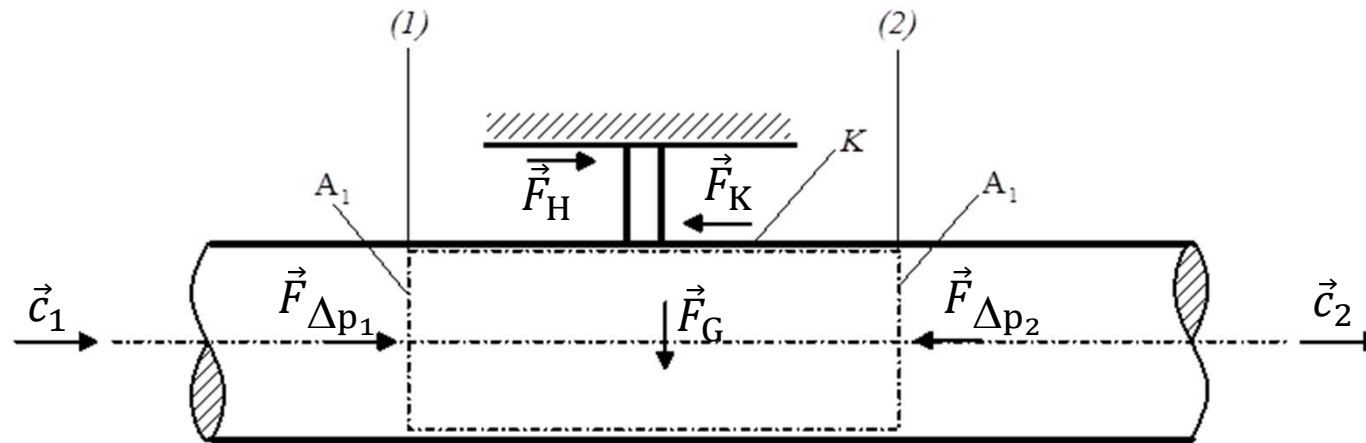
Druckkräfte

$$p_1 = p_2$$

also

$$F_{\Delta p_1} = F_{\Delta p_2}$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum



Körperkraft

$$F_{K_x} = 0$$

$$F_{K_y} = -F_G$$

bzw.

$$\vec{F}_K = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_G \end{bmatrix}$$

Haltekraft

$$\vec{F}_H = -\vec{F}_K = \begin{bmatrix} 0 \\ F_G \end{bmatrix}$$

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Gerades Rohrsegment mit konstantem Querschnitt

- Keine Impulskraft infolge der Durchströmung bei reibungsfreier Betrachtung
Es wirkt lediglich das Eigengewicht des im Rohr befindlichen Fluids

Impulskraft

- Ursache ist die Differenz zwischen ein- und austretenden Impulsströmen
- Erst wenn diese Differenz in der betrachteten Koordinatenrichtung ungleich null ist, kann eine Kraft in Erscheinung treten
- Querschnittsänderung (Düse oder Diffusor)
- Richtungsänderung (Rohrkrümmer)

6.3 Kräfte auf ein Fluid im Kontrollraum

Allgemeiner Fall

System mit mehr als einer Eintritts- und mehr als einer Austrittsfläche

$$\vec{F}_K = - \left(\sum_{i=1}^m \vec{I}_{\text{Austritt}_i} - \sum_{j=1}^n \vec{I}_{\text{Eintritt}_j} \right) + \sum_{i=1}^m \vec{F}_{\Delta p_{\text{Austritt}_i}} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{\Delta p_{\text{Eintritt}_j}} + \vec{F}_G$$

bzw.

$$\vec{F}_K = - \left(\sum_{i=1}^m (\dot{m}_i \cdot \vec{c}_i)_{\text{Austritt}} - \sum_{j=1}^n (\dot{m}_j \cdot \vec{c}_j)_{\text{Eintritt}} \right) + \sum_{i=1}^m \vec{F}_{\Delta p_{\text{Austritt}_i}} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{\Delta p_{\text{Eintritt}_j}} + \vec{F}_G$$

6.4 Anwendungsprinzip des Impulssatzes

- Definition eines Kontrollraums
- Kennzeichnung aller Ein- und Austrittsebenen
- Eintragen der Vektoren für die Geschwindigkeit und die Druckkraft an allen Ein- und Austrittsebenen
- Eintragen des Vektors für die Gewichtskraft des Fluids
- Festlegung eines Koordinatensystems
- Bestimmung der Winkel zu allen Vektoren
- Winkel werden links drehend positiv gegenüber der x -Achse angetragen
- Bestimmung von statischem Druck und Geschwindigkeit in allen Ein- und Austrittsebenen
 - Bernoulli-Gleichung
 - Kontinuitätsgleichung
 - Zustandsgleichung des idealen Gases

6.4 Anwendungsprinzip des Impulssatzes

- Berechnung der Druckkräfte

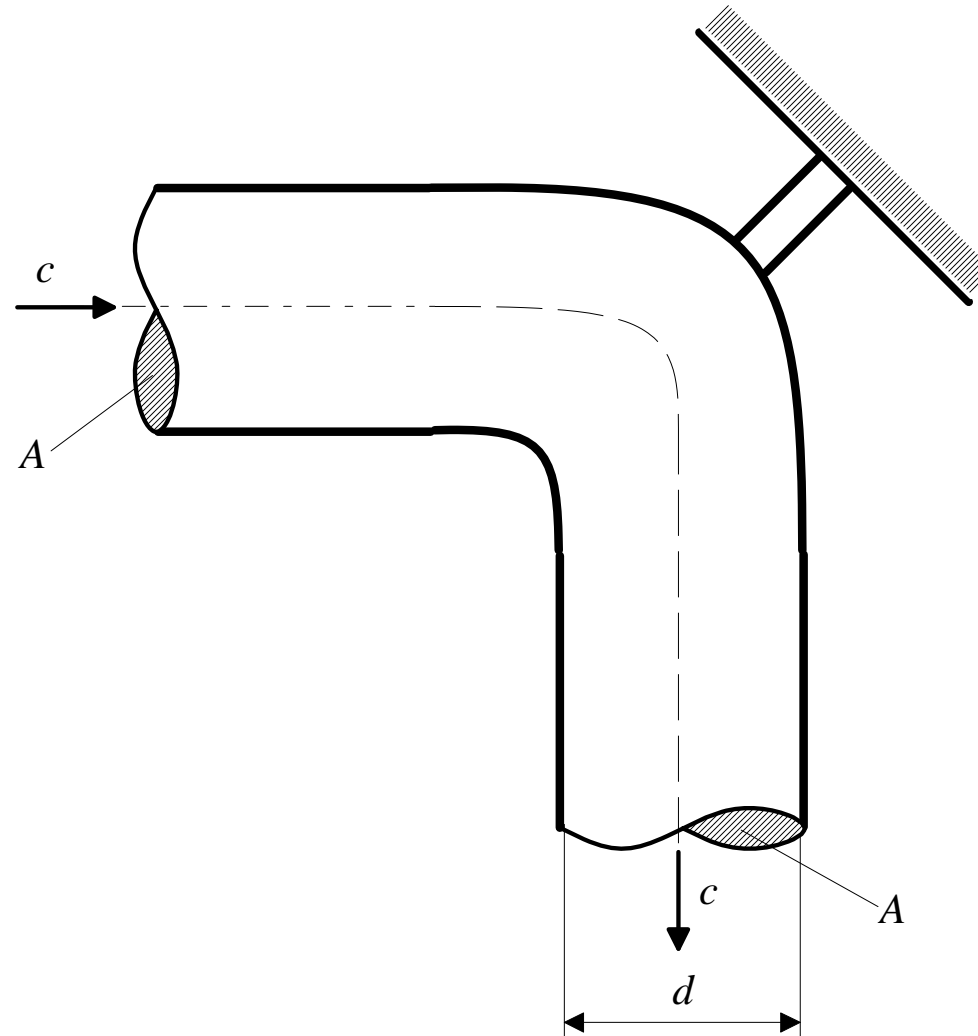
$$\vec{F}_{\Delta p} = (p_i - p_a) \cdot A$$

- Impulsgleichung für die Körperkraft in x - und y -Richtung

$$F_{K_x} = -\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \cos\alpha_{c_2} - c_1 \cdot \cos\alpha_{c_1}) + F_{\Delta p_1} \cdot \cos\alpha_{\Delta p_1} + F_{\Delta p_2} \cdot \cos\alpha_{\Delta p_2} + F_G \cdot \cos\alpha_G$$

$$F_{K_y} = -\dot{m} \cdot (c_2 \cdot \sin\alpha_{c_2} - c_1 \cdot \sin\alpha_{c_1}) + F_{\Delta p_1} \cdot \sin\alpha_{\Delta p_1} + F_{\Delta p_2} \cdot \sin\alpha_{\Delta p_2} + F_G \cdot \sin\alpha_G$$

Übung 6-1

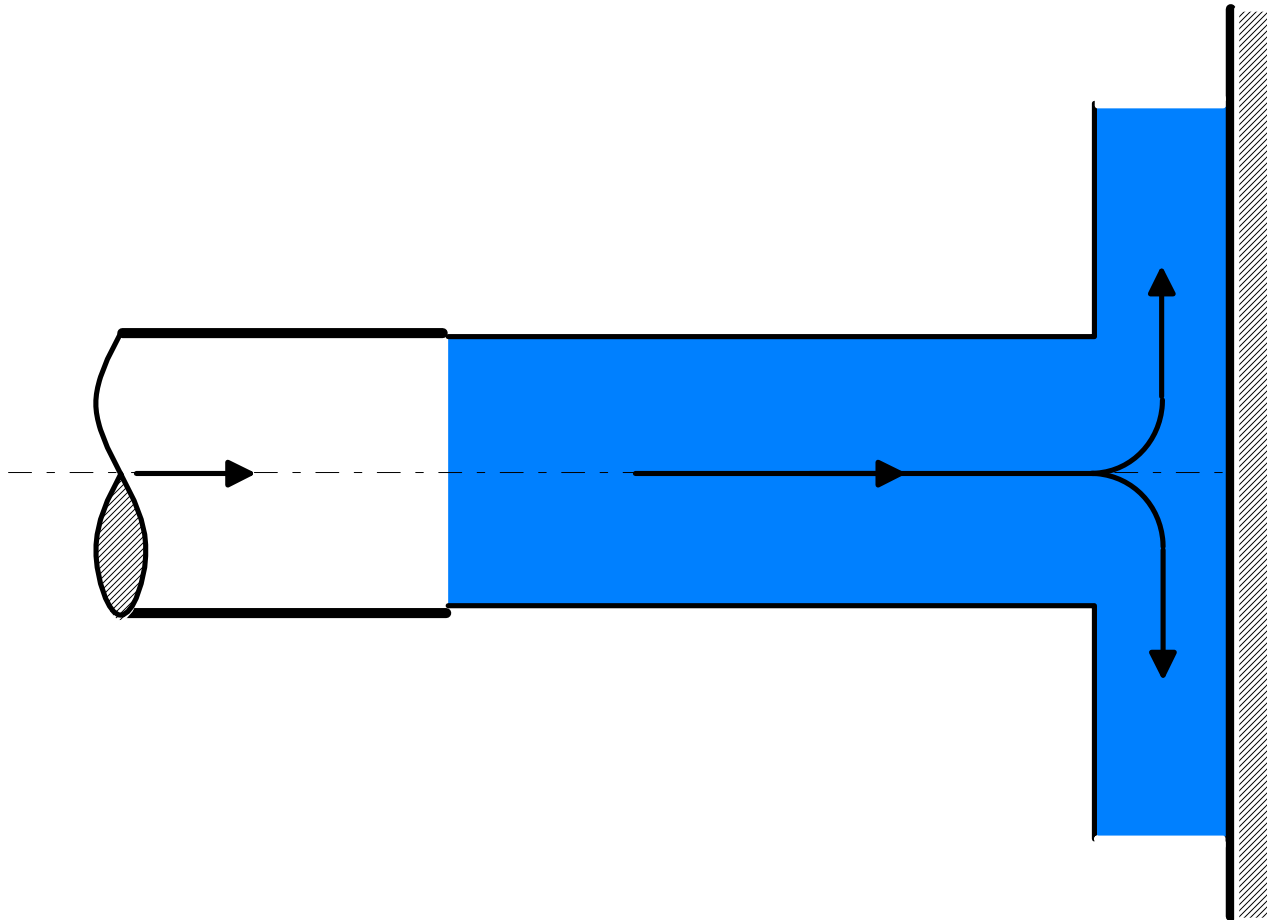


Übung 6-1

Betrachtet wird der skizzierte 90°-Rohrkrümmer mit konstantem Querschnitt. Dieser wird stationär mit der Geschwindigkeit $c_1 = c_2 = c$ durchströmt. Der Krümmer liegt horizontal. Ein- und Austrittsfläche sind gleich groß. Sie können die Annahme treffen, dass die Halterung die Gewichtskraft des Rohrkrümmer mit Fluid im statischen Fall aufnimmt, d.h. $F_G = 0$.

Berechnen Sie die zusätzliche Haltekraft \vec{F}_H , die der Halter an der Wand infolge der Rohrströmung aufnehmen muss, wenn folgende Größen gegeben sind:

Umgebungsdruck	$p_a = 1 \text{ bar}$
statischer Druck im Eintrittsquerschnitt	$p_1 = 2,3 \text{ bar}$
Strömungsgeschwindigkeit	$c = 10 \text{ m/s}$
Dichte	$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$
Rohrinnendurchmesser	$d = 30 \text{ mm}$

Übung 6-2

Übung 6-2

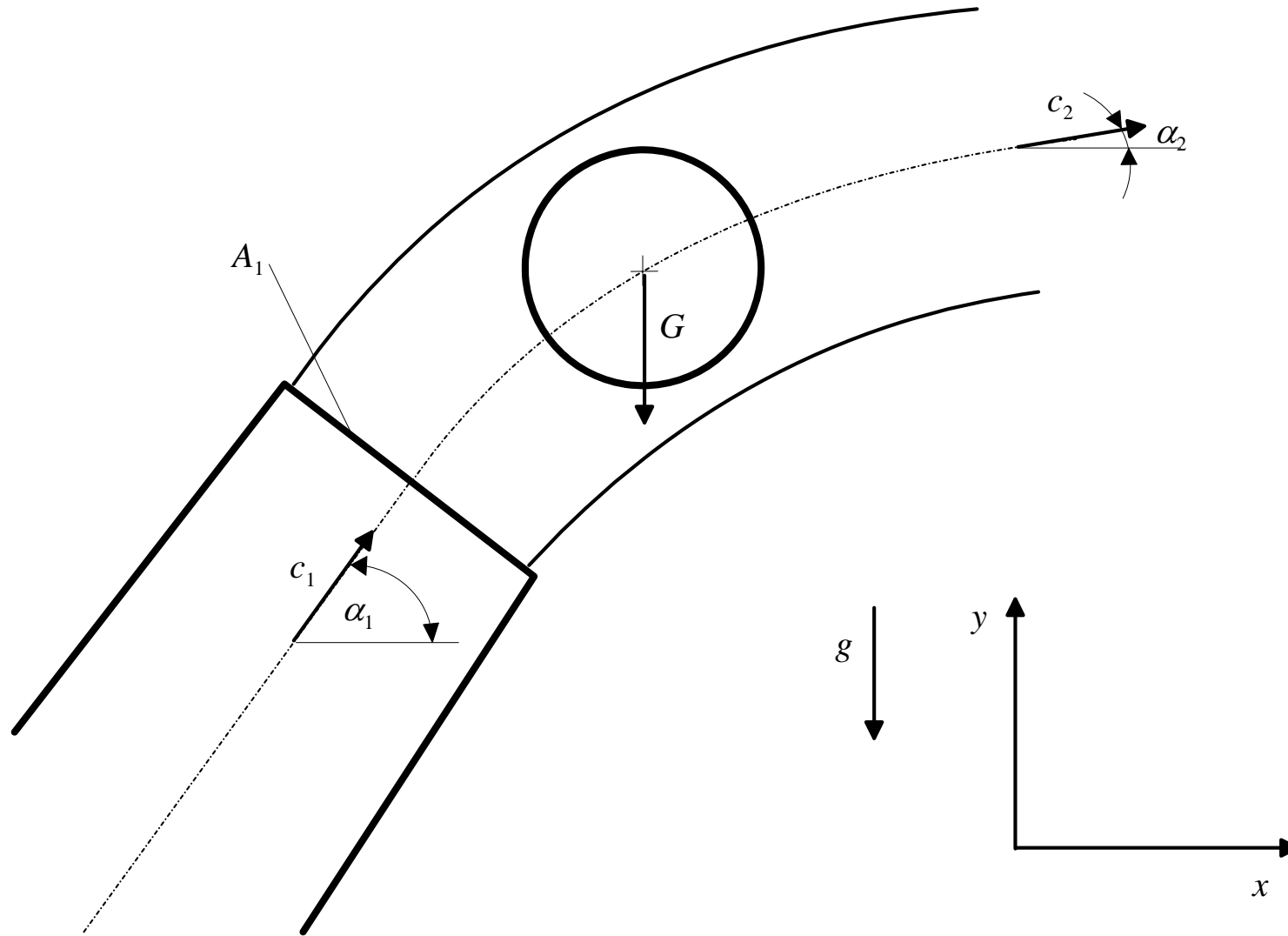
Aus einem horizontalen Rohr tritt ein Wasserstrahl aus, trifft auf eine Platte und teilt sich dort in zwei gleich große Teilstrahlen auf. Gesucht ist die Körperkraft auf die Platte und die erforderliche Haltekraft.

Wie ändern sich diese Kräfte, wenn die Platte um einen Winkel φ gegenüber der Anströmrichtung aus dem Rohr gedreht wird?

Gegeben sind folgende Größen:

Umgebungsdruck	$p_a = 1 \text{ bar}$
Strömungsgeschwindigkeit	$c = 10 \text{ m/s}$
Dichte	$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$
Rohrinnendurchmesser	$d = 30 \text{ mm}$
Neigungswinkel der Platte	$\varphi = 0^\circ, 10^\circ$

Übung 6-3



Übung 6-3

Ein Tischtennisball kann durch einen ihn umströmenden Luftfreistrahls so in der Schwebe gehalten werden, dass er sich nicht zu bewegen scheint. Dazu muss eine Kraft aufgebracht werden, die bei richtiger Abstimmung aller Größen in der Lage ist, das Gewicht des Balls zu kompensieren. Das Eigengewicht des Luftstrahls kann vernachlässigt und die Strömung kann als stationär und inkompressibel betrachtet werden.

Setzen Sie den Eintrittsquerschnitt A_1 , die Geschwindigkeit c_1 und den Winkel α_1 sowie das Gewicht G des Balls als bekannt voraus.

1. Berechnen Sie die Reaktionskraft R_x auf den Tischtennisball in x -Richtung
2. Berechnen Sie die Reaktionskraft R_y auf den Tischtennisball in y -Richtung
3. Berechnen Sie den Austrittswinkel α_2 des Luftstrahls aus den gegebenen Größen
4. Bestimmen Sie die Abströmgeschwindigkeit c_2 in Abhängigkeit der gegebenen beziehungsweise berechneten Größen.

Übung 6-4

Zur Stromversorgung Ihrer auf $h = 2000\text{m}$ Höhe gelegenen Berghütte beschließen Sie eine Windkraftanlage zu installieren. Im Vorfeld führen Sie über einen gesamten Jahreszyklus eine Messung der Windgeschwindigkeit am vorgesehenen Ort für das Minikraftwerk durch. Dabei ermitteln Sie eine mittlere Windgeschwindigkeit von $c = 5 \text{ m/s}$.

Die maximale Bauteilgröße, die Sie im Tragegestell auf den Berg transportieren können beträgt $l_{\text{max}} = 2 \text{ m}$.

1. Berechnen Sie die maximale Leistung, die Sie im Idealfall aus der Windkraftanlage entziehen können
2. Berechnen Sie die Kraft auf die Achse des Rotors