*Übung 4-1*

Nach erfolgreichem Abschluss Ihres Studiums haben Sie von Ihrem ersten Gehalt als Ingenieur eine schöne Berghütte in den Alpen erworben. Relativ schnell bemerken Sie den Grund für den günstigen Kaufpreis. Es findet sich zwar fließendes Wasser in Form eines Bachlaufs vor der Hütte, jedoch kein elektrischer Strom. Leicht irritiert von den permanenten Auseinandersetzungen mit Ihrer besseren Hälfte über den Geschirrabwasch, beschließen Sie die Installation eines kleinen Wasserkraftwerks. Immerhin sind Sie ja Ingenieur und möchten einen positiven Beitrag zu Ihrer Beziehung liefern.

Welche Überlegungen sollten Sie anstellen, bevor Sie die Spülmaschine im Tragegestell auf den Berg schleppen?

**1.** Welcher Energiebedarf muss abgedeckt werden?

Dazu werfen Sie einfach einen Blick auf das Typenschild oder, auch wenn das völlig unsportlich sein sollte, lesen(!) Sie die Bedienungsanleitung.

**2.** Erstellen Sie eine Energiebilanz im Sinne des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für ein offen durchströmtes System.

$$q_{12} + w_{\mathrm{t},12} + e_{\mathrm{diss}} = \frac{1}{2} \cdot ({c_2}^2 - {c_1}^2) + g \cdot (z_2 - z_1) + (u_2 - u_1) + (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1)$$

Nun, das sind erstmal eine ganze Reihe von Termen. Allerdings benötigen Sie diese gar nicht alle.

**3.** Überlegen Sie, welche Vereinfachungen getroffen werden könnten.

Beginnen Sie mit der spezifischen Wärme $q_{12}$. Dieser Term wäre dann relevant, wenn signifikante Wärmemengen übertragen werden, also beispielsweise in einer Brennkammer oder einem Wärmetauscher. Im Fall unseres Wasserkraftwerks ist dies sicher nicht der Fall, das heißt diesen Term können Sie streichen. Die spezifische Arbeit $w_{\mathrm{t},12}$ sollten Sie behalten. Diese möchten Sie ja berechnen. Den Verlustterm $e_{\mathrm{diss}}$ können Sie erst bestimmen, wenn das Kraftwerk fertig ist. Der Einfachheit halber setzen Sie diesen Term gleich Null. Nun zu den Systemenergien. Wenn Sie das Kraftwerk zwischen einem kleinen aufgestauten Obersee und einem Untersee betreiben, wobei die Pegelstände konstant bleiben und Sie den Anfangspunkt der Bilanz an den Obersee und den Endpunkt der Bilanz an den Untersee legen, sind die Geschwindigkeiten gleich null. Die Änderung der kinetischen Energie kann also vernachlässigt werden. Nicht vernachlässigt werden kann die Änderung des Potentials. Letztendlich ist der Höhenunterschied $z_2 - z_1$ die treibende Kraft, die Sie zum Betrieb der Anlage nutzen können.

Da an der Oberfläche von Ober- und Untersee Umgebungsdruck herrscht kann auch die Änderung der Druckenergie vernachlässigt werden. Das gleiche gilt für die innere Energie, da sich die Wassertemperatur beim Durchströmen des Kraftwerks kaum ändern wird. Nun zurück zum ersten Hauptsatz. Alles was davon nach unseren Vereinfachungen noch übrig bleibt ist

$$w_{\mathrm{t},12} = g \cdot (z_2 - z_1)$$

Das sieht doch nun deutlich übersichtlicher aus. Zur Berechnung der Leistung benötigen Sie lediglich noch den Massestrom $\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A$. Der lässt sich leicht aus dem Querschnitt des Bachbetts sowie der Strömungsgeschwindigkeit bestimmen. Letztere messen Sie mithilfe eines Korkens, den Sie über eine bestimmte Strecke schwimmen lassen und als Ingenieur wissen Sie natürlich, dass die Dichte von Wasser $\rho = 1000$ kg/m³ beträgt. Damit erhalten Sie die theoretische Maximalleistung des Kraftwerks.

$$P = \dot{m} \cdot w_{\mathrm{t},12} = \rho \cdot c \cdot A \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$$

**4.** Ergebnisanalyse

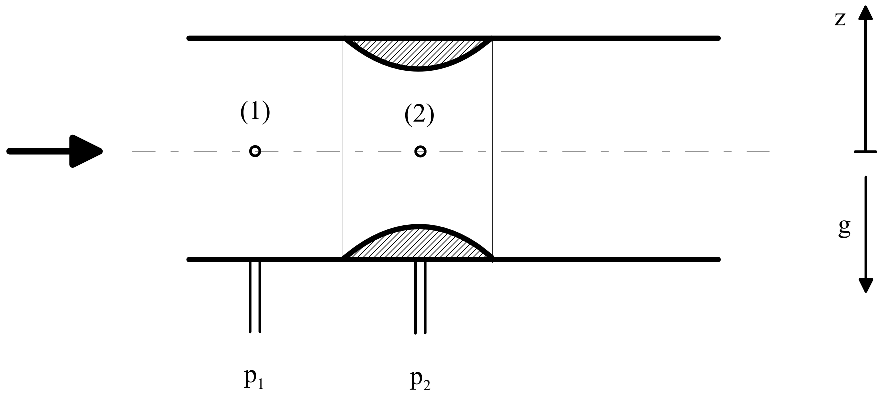
Sofern die berechnete Leistung nicht den Energiebedarf der Spülmaschine abdeckt, brauchen Sie keine weiteren Berechnungen mehr anstellen. Es reicht einfach nicht, da es sich um eine ideale, verlustfreie Betrachtung handelt. In der Realität wird das Kraftwerk deutlich weniger Energie liefern. Problematisch wird die Situation, wenn rein rechnerisch ein kleiner Überschuss erzielt wird, da Sie den Wirkungsgrad erst im Nachhinein bestimmen können.

*Übung 4-2*

Für die skizzierte Kraftstoffleitung mit einer Messblende zur Durchflussmessung ist der Kraftstoffdurchfluss $\dot{V}$ [l/h] zu berechnen.

Vor der Blende (1) und in der Blende (2) befinden sich je eine Druckbohrung zur Messung des statischen Drucks. Der Innendurchmesser der Leitung beträgt $d_1$ = 10 mm. Der engste Querschnitt der Blende beträgt $d_2$ = 5 mm.

Die gemessenen statischen Drücke betragen $p_1$ = 10.000 Pa und $p_2$ = 9.800 Pa. Die Dichte des Kraftstoffs beträgt $\rho$ = 720 kg/m³.




**1.** Überprüfung ob die Bernoulli-Gleichung sinnvoll angewendet werden kann

In der Kraftstoffleitung findet weder eine signifikante Wärmeübertragung statt noch ist eine Arbeitsmaschine vorhanden. Reibungsverluste sind zwar sicherlich vorhanden, können im ersten Ansatz ebenfalls vernachlässigt werden. Damit verschwinden alle Transportenergien. Die Annahme, dass die Temperatur des Kraftstoffs konstant bleibt, hängt von dem jeweiligen Einbauort der Leitung ab. In diesem Fall nehmen wir an, dass der Kraftstoff seine Temperatur nicht ändert. Letzte Voraussetzung ist eine konstante Dichte. Bei flüssigem Kraftstoff ist auch diese Annahme recht gut erfüllt.

**2.** Aufstellen einer Bilanz

Wenn Sie die Bernoulli-Gleichung betrachten, fällt Ihnen auf, dass auf der linken als auch auf der rechten Seite jeweils drei unbekannte Parameter stehen. Durch eine geeignete Festlegung des Start- und Endpunkts der Bilanz lässt sich die Anzahl der unbekannten Parameter soweit reduzieren, dass damit die Gleichung gelöst werden kann. Sofern Sie einen reibungsfreien Strömungsvorgang ohne Energieübertragung betrachten, spielt die Richtung der Bilanz keine Rolle. Es ist jedoch günstig, eine Bilanz immer in Strömungsrichtung aufzustellen, da bei der Berücksichtigung von Verlusten und Arbeitsmaschinen die Richtung sehr wohl eine Rolle spielt.

Welche der unterschiedlichen Schreibweisen der Bernoulli-Gleichung Sie wählen ist völlig unerheblich. Nehmen Sie beispielsweise die Druckform

$$\frac{\rho}{2} \cdot c^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = p_{\text{ges}} = const.$$

Für eine Bilanz von (1) nach (2) wird daraus

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2$$

Mithilfe der Kontinuitätsgleichung können Sie bei konstanter Dichte und bekannten Querschnitten eine Geschwindigkeit eliminieren

$$c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2$$

also

$$c_1 = c_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} = c_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

Da die Leitung horizontal verläuft, gilt für die Höhenkoordinaten

$$z_1 = z_2$$

Damit reduziert sich die Bernoulli-Gleichung zu

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 + p_2$$

also

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \left[\frac{p_2 - p_1}{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - 1}\right]}$$

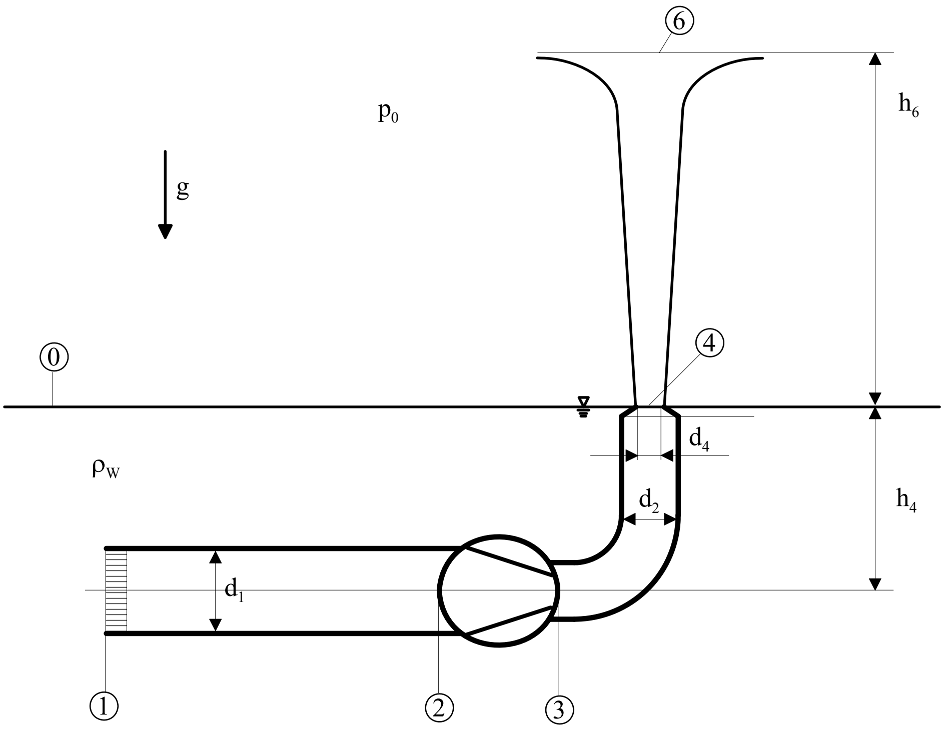
Der Volumenstrom ergibt sich damit zu

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \left[\frac{p_2 - p_1}{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - 1}\right]} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot {d_2}^2$$

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2}{720} \cdot \left[\frac{9800 - 10000}{\left(\frac{0{,}005}{0{,}01}\right)^4 - 1}\right]} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}005^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s} = 54{,}4\ \mathrm{l/h}$$

*Übung 4-3*

In einem Teich liegt in der Tiefe $h_4$ unter dem konstanten Wasserspiegel eine Tauchpumpe zum Betrieb eines Springbrunnens. An der Stelle (1) saugt die Pumpe das Wasser an und erzeugt mit der Düse an der Stelle (4) eine Fontäne, die die Höhe $h_6$ über der Wasseroberfläche erreicht.




Bei allen folgenden Betrachtungen können Sie von einer reibungsfreien Strömung ausgehen.

**1.** Geben Sie die Geschwindigkeiten im Ansaugrohr vor der Pumpe $c_1$, im Austrittsrohr hinter der Pumpe $c_2$ und an der Düse $c_4$ als Funktion der in der Zeichnung gegebenen Größen an.

Der Volumenstrom ist zwar nicht gegeben aber es gibt noch andere Möglichkeiten die Geschwindigkeiten zu bestimmen. Da wäre beispielsweise die Fontäne von (4) nach (6).

**Variante 1:** Bernoulli-Gleichung von (4) nach (6)

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_4}^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + p_4 = \frac{\rho}{2} \cdot {c_6}^2 + \rho \cdot g \cdot z_6 + p_6$$

**Annahmen und Vereinfachungen:**

Die Geschwindigkeit $c_4$ sollten Sie behalten. Diese möchten Sie ja ausrechnen. An der Spitze der Fontäne (6) kommt der Wasserstrahl zum Stillstand, es gilt: $c_6 = 0$.

Die Referenz für das Potential $z = 0$ können Sie auf jede beliebige Höhe legen, da immer nur die Differenz zwischen den beiden Höhenkoordinaten betrachtet wird. Günstig ist es allerdings, wenn Sie dafür den tiefsten Punkt in der Bilanz nehmen, also in diesem Fall $z_4 = 0$. Damit gilt für die zweite Höhenkoordinate $z_6 = h_6$. Die statischen Drücke $p_4$ und $p_6$ entsprechen dem Umgebungsdruck $p_0$. Bei der Fontäne handelt es sich um einen sogenannten Freistrahl. das bedeutet, dass sich der äußere Umgebungsdruck dem Strahl aufprägt. Der Druck im Inneren eines Strahls entspricht immer dem äußeren Umgebungsdruck. Entsprechend herrscht am Düsenaustritt (4) als auch an der Spitze der Fontäne im Punkt (6) der Umgebungsdruck $p_0$. Damit vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung zu

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_4}^2 + p_0 = \rho \cdot g \cdot h_6 + p_0$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_4}^2 = \rho \cdot g \cdot h_6$$

also

$$c_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_6}$$

**Variante 2:** Senkrechter Wurf im reibungsfreien Fall oder auch einen schönen Gruß von Herrn Torricelli

Im reibungsfreien Fall erreicht ein Körper, der aus der Höhe $h_6$ herabfällt am Boden die Geschwindigkeit $c_4$

$$c_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_6}$$

Das funktioniert auch anders herum. Wenn Sie einen Körper mit der Geschwindigkeit $c_4$ senkrecht nach oben werfen, erreicht er die Steighöhe $h_6$.

$$h_6 = \frac{{c_4}^2}{2 \cdot g}$$

Die beiden anderen Geschwindigkeiten erhalten Sie aus der Kontinuitätsgleichung

$$c_1 = c_4 \cdot \frac{A_4}{A_1} = c_4 \cdot \frac{{d_4}^2}{{d_1}^2}$$

und

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = c_1 \cdot \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2}$$

**2.** Geben Sie die Leistung $P$ der Pumpe als Funktion der gegebenen Größen an

**Variante 1:** Bilanz von (0) nach (4)

$$\frac{\rho_\mathrm{W}}{2} \cdot {c_0}^2 + \rho \cdot g \cdot z_0 + p_0 + \Delta p_\mathrm{Pumpe} = \frac{\rho_W}{2} \cdot {c_4}^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + p_4$$

mit

$$c_0 = 0,\ z_0 = z_4 = 0,\ p_0 = p_4 = p_0$$

folgt

$$\Delta p_\mathrm{Pumpe} = \frac{\rho_\mathrm{W}}{2} \cdot {c_4}^2$$

$$P_\mathrm{Pumpe} = \Delta p_\mathrm{Pumpe} \cdot \dot{V} = \Delta p_\mathrm{Pumpe} \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot {d_1}^2$$

**Variante 2:** Bilanz von (0) nach (6)

$$\frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cdot {c_0}^2 + \rho \cdot g \cdot z_0 + p_0 + \Delta p_{\mathrm{Pumpe}} = \frac{\rho_{\mathrm{W}}}{2} \cdot {c_6}^2 + \rho \cdot g \cdot z_6 + p_6$$

mit

$$c_0 = 0,\ c_6 = 0,\ z_0 = 0,\ z_6 = h_6,\ p_0 = p_6 = p_0$$

folgt

$$\Delta p_{\mathrm{Pumpe}} = \rho_W \cdot g \cdot h_6$$

$$P_{\mathrm{Pumpe}} = \Delta p_{\mathrm{Pumpe}} \cdot \dot{V} = \Delta p_{\mathrm{Pumpe}} \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot {d_1}^2$$

**Anmerkung**

Der Einlauf des Ansaugrohrs (1) kann nicht als Startpunkt für die Bilanz verwendet werden. In diesem Bereich wird die Strömung von der Geschwindigkeit null auf die Geschwindigkeit im Ansaugrohr beschleunigt. Dadurch sinkt in diesem Bereich der statische Druck ab. Da Sie diesen Druck nicht kennen, kann dieser Punkt auch nicht für eine Bilanz verwendet werden.

**3.** Berechnen Sie die Leistung $P$ der Pumpe für folgende Werte

$d_1$ = 0,08 m, $d_2$ = 0,058 m, $d_4$ = 0,04 m, $h_4$ = 3,0 m, $h_6$ = 20,387 m, $\rho_{\mathrm{W}}$ = 1000 kg/m³, $p_0$ = 1 bar

$$c_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_6} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20{,}387} = 20\ \mathrm{m/s}$$

$$c_1 = c_4 \cdot \frac{{d_4}^2}{{d_1}^2} = 20 \cdot \frac{0{,}04^2}{0{,}08^2} = 5\ \mathrm{m/s}$$

$$P_{\mathrm{Pumpe}} = \Delta p_{\mathrm{Pumpe}} \cdot \dot{V} = \rho_{\mathrm{W}} \cdot g \cdot h_6 \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot {d_1}^2$$

$$P_{\mathrm{Pumpe}} = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 20{,}387 \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}08^2 = 5026\ \mathrm{W}$$

*Übung 4-4*

Während Sie noch voller Besitzerstolz Ihr neues Fahrzeug betrachten, überlegen Sie sich angesichts Ihrer durch den Neuerwerb entstandenen knappen Kassenlage, ob sich der Kraftstoffverbrauch durch eine polierte Lackoberfläche senken lässt. Sie erinnern sich daran, dass ein Körper mit einer laminaren Grenzschicht einen deutlich geringeren Reibungswiderstand aufweist als mit einer turbulenten Grenzschicht und untersuchen die Verhältnisse auf der Kühlerhaube.

**Annahmen:**

Über den gesamten Fahrzyklus sind Sie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $c_\infty$ = 60 km/h unterwegs. Dabei bewegen Sie sich durch eine vollständig ruhende Luftmasse, in der die Standardbedingungen auf Meeresniveau herrschen. Also $T$ = 15°C, $\rho$ = 1,225 kg/m$^3$ und $\nu$ = 1,462·10$^{-5}$ m$^2$/s. Die kritische Reynolds-Zahl für den Umschlag von laminar zu turbulent beträgt $Re_{\text{krit}}$ = 3,2·10$^5$. Die Oberfläche kann über die gesamte Lauflänge als hydraulisch glatt betrachtet werden.

**1. Berechnen Sie die laminare Anlaufstrecke der Strömung auf der Kühlerhaube.**

$$Re_{\text{krit}} = \frac{c_\infty \cdot x_{\text{krit}}}{\nu}$$

$$x_{\text{krit}} = \frac{Re_{\text{krit}} \cdot \nu}{c_\infty} = \frac{3{,}2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}462 \cdot 10^{-5}}{\frac{60}{3{,}6}} = 0{,}28 \text{ m}$$

**2. Berechnen Sie die Dicke $\delta_S$ der laminaren Grenzschicht und den lokalen Reibungsbeiwert $c_R$ am Transitionspunkt, also bei $x_{\text{krit.}}$**

$$\delta_S(x_{krit}) = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot x_{\text{krit}}}{c_\infty}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{1{,}462 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}28}{16{,}67}} = 2{,}48 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$c_R(x_{\text{krit}}) = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_{\text{krit}}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{3{,}2 \cdot 10^5}} = 2{,}35 \cdot 10^{-3}$$

Nach 28 cm Lauflänge ist die laminare Grenzschicht auf der Motorhaube auf eine Dicke von ungefähr 2,5 mm angewachsen, um sich ab dieser Stelle für einen turbulenten Charakter zu entscheiden. Spätestens ab dieser Stelle können Sie sich die Mühe und auch das Geld für eine teure Politur sparen.

**3. Berechnen Sie die Dicke $\delta_S$ der turbulenten Grenzschicht und den lokalen Reibungsbeiwert $c_R$ an einer Stelle, die einen Meter stromabwärts von der Vorderkante der Motorhaube, also kurz vor der Windschutzscheibe liegt.**

Mit

$$x' = l - x_{\text{krit}} = 1 - 0{,}28 = 0{,}72 \text{ m}$$

folgt

$$Re_{x'} = \frac{c_\infty \cdot x'}{\nu} = \frac{16{,}67 \cdot 0{,}72}{1{,}462 \cdot 10^{-5}} = 8{,}21 \cdot 10^5$$

und

$$\delta(x') = 0{,}37 \cdot x' \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{Re_{x'}}} = 0{,}37 \cdot 0{,}72 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{8{,}21 \cdot 10^5}} = 0{,}0175 \text{ m}$$

mit $Re < 10^7$

$$c_\mathrm{R}(x') = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{Re_{\mathrm{x}'}}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{8{,}21 \cdot 10^5}} = 4{,}86 \cdot 10^{-3}$$

Das bedeutet also, dass die Grenzschicht kurz vor Erreichen der Windschutzscheibe auf die stattliche Dicke von ungefähr 17,5 mm angewachsen ist. Somit können Sie sich nicht nur die Politur sparen, sondern auch das Entfernen von Verschmutzungen jeglicher Art stromabwärts der Transition hat lediglich kosmetische Auswirkungen. Der Reibungswiderstand und somit der Kraftstoffverbrauch sind davon (fast) völlig unbeeindruckt.

**4. Berechnen Sie den gesamten Reibungsbeiwert der Motorhaube, wenn deren Gesamtlänge *l* = 1 m beträgt.**

$$Re_\mathrm{l} = \frac{c_\infty \cdot l}{\nu} = \frac{16{,}67 \cdot 1}{1{,}462 \cdot 10^{-5}} = 1{,}14 \cdot 10^6$$

mit $Re_\mathrm{krit} = 3{,}2 \cdot 10^5$ und $A$=1115 (interpoliert) folgt

$$c_\mathrm{R} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{Re_l}} - \frac{A}{Re_l} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{1{,}14 \cdot 10^6}} - \frac{1115}{1{,}14 \cdot 10^6} = 3{,}57 \cdot 10^{-3}$$

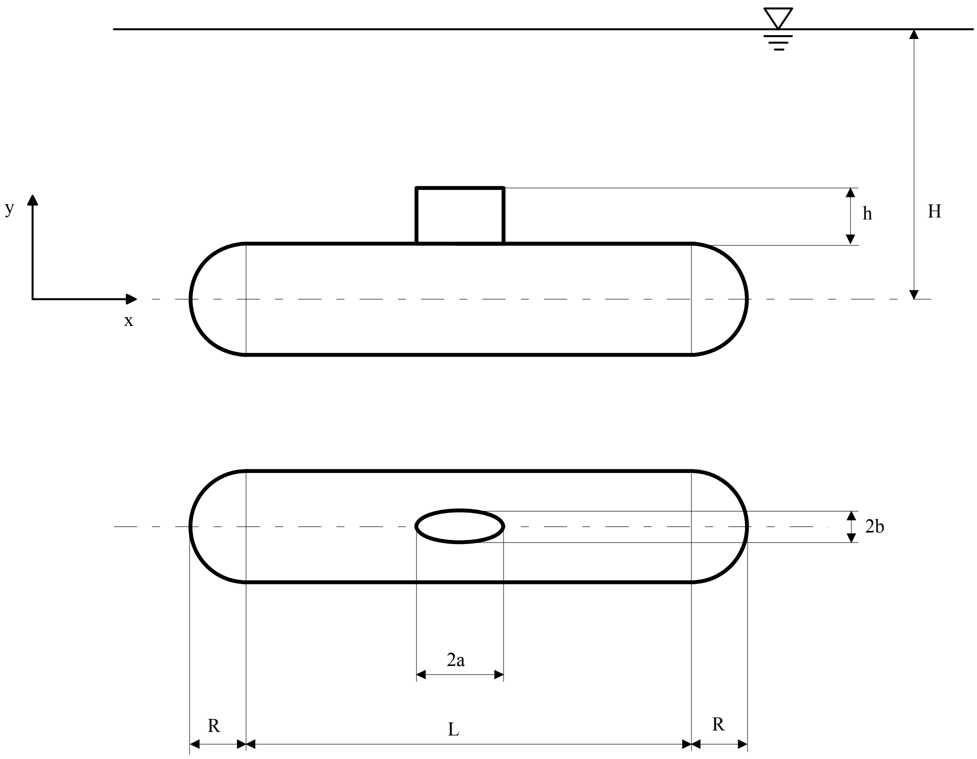
*Übung 4-5*

Sie kommandieren das unten skizzierte U-Boot. Das Boot besteht aus einem zylindrischen Rumpf mit jeweils einem Halbkugelsegment an Bug und Heck. Der Turm hat den Querschnitt einer Ellipse und wird an der Oberseite durch eine ebene Fläche abgeschlossen. Dabei werden folgende Annahmen getroffen:

$L$ = 100m, $R$ = 5m, $a$ = 5m, $b$ = 2m, $h$ = 4m, $H$ = 200m,

$\rho$ = 1030 kg/m³, $\nu = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ m²/s

In einer Tauchtiefe von $H$ = 200m macht das Boot eine Fahrt von $c$ = 10Knoten




**1.** Berechnen Sie die Masse $m$ des Bootes bei stationärer Tauchfahrt.

$$m_{\text{Boot}} \cdot g = F_{\text{A}} = \rho \cdot V_{\text{Boot}} \cdot g = \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot L + \pi \cdot a \cdot b \cdot h\right) \cdot g$$

$$m_{\text{Boot}} = \rho \cdot V_{\text{Boot}} = \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot L + \pi \cdot a \cdot b \cdot h\right)$$

$$m_{\text{Boot}} = 1030 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 + \pi \cdot 5^2 \cdot 100 + \pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4\right) = 8{,}758 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

**2.** Berechnen Sie die Lauflänge $l_{\text{krit}}$ der laminaren Grenzschicht bis zur Transition sowie die Dicke der laminaren Grenzschicht $\delta_{\text{lam}}$ an der Transitionsstelle, wenn die kritische Reynolds-Zahl $Re_{\text{krit}} = 3{,}5 \cdot 10^5$ beträgt.

**Hinweis:**

1 Knoten = 1 Nautische Meile/Stunde ≈ 1,852 km/h

1 Nautische Meile = 1 Bogenminute am Äquator = 40.000 km/(360·60) ≈ 1,852 km

$$Re_{\mathrm{krit}} = \frac{c \cdot l_{\mathrm{krit}}}{\nu}$$

$$l_{\mathrm{krit}} = \frac{\nu \cdot Re_{\mathrm{krit}}}{c} = \frac{3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 1{,}852/3{,}6} = 0{,}095\ \mathrm{m}$$

**3.** Beurteilen Sie die Bedeutung der laminaren Anlaufstrecke am Rumpf für den gesamtwiderstand.

Bei einer Gesamtlänge des Bootes von 110 m kann die laminare Anlaufstrecke der Grenzschicht von 9,5 cm bei der Widerstandsberechnung getrost vernachlässigt werden.

**4.** Berechnen Sie den Reibungswiderstand $W_{\mathrm{R,Turm}}$ des Turms unter der Annahme, dass die Strömung am Turm nicht ablöst.

**Hinweis**

Die Bezugslänge für die Reynolds-Zahl am Turm wird mit der Länge der großen Halbachse der Ellipse gebildet

$$Re = \frac{c \cdot l_{\mathrm{ref}}}{\nu} = \frac{5{,}144 \cdot 2 \cdot 5}{1{,}4 \cdot 10^{-6}} = 3{,}6 \cdot 10^7$$

Berechnung des Reibungsbeiwerts $c_R$ bei einer laminaren Anlaufstrecke und Re > $10^7$. Für eine kritische Reynolds-Zahl von $Re_{\mathrm{krit}} = 3{,}5 \cdot 10^5$ gilt $A = 1213$.

$$c_{\mathrm{R}} = \frac{0{,}455}{log(Re)^{2{,}58}} - \frac{A}{Re} = \frac{0{,}455}{log(3{,}6 \cdot 10^7)^{2{,}58}} - \frac{1213}{3{,}6 \cdot 10^7} = 0{,}0024$$

**Hinweise**

Der Umfang $U$ einer Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ beträgt näherungsweise

$$U \approx \pi \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (a + b) - \sqrt{a \cdot b}\right]$$

somit gilt für den Turm

$$U \approx \pi \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (5 + 2) - \sqrt{5 \cdot 2}\right] = 23{,}052\ \mathrm{m}$$

$$W_{\mathrm{R,Turm}} = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot O = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot (U \cdot h + \pi \cdot a \cdot b)$$

$$W_{\mathrm{R,Turm}} = 0{,}0024 \cdot \frac{1030}{2} \cdot 5{,}144^2 \cdot (23{,}052 \cdot 4 + \pi \cdot 5 \cdot 2) = 4043\ \mathrm{N}$$

**5.** Berechnen Sie den Reibungswiderstand $W_{\mathrm{R,ges}}$ des gesamten Bootes unter der Annahme, dass der gesamte Rumpf turbulent angeströmt wird. Am halbkugelförmigen Heck löst die Strömung ab.

**Hinweis**

Die Reynolds-Zahl am Rumpf ist mit der Gesamtlänge des Bootes zu berechnen.

Das halbkugelförmige Heck wird Aufgrund der abgelösten Strömung in diesem Bereich nicht bei der Berechnung des Reibungswiderstands mit einbezogen.

$$Re_{\mathrm{L,ges}} = \frac{c \cdot L_{\mathrm{ges}}}{\nu} = \frac{5{,}144 \cdot 110}{1{,}4 \cdot 10^{-6}} = 3{,}93 \cdot 10^{8}$$

Reibungsbeiwert bei turbulenter Grenzschicht und $Re > 10^7$

$$c_{\mathrm{R}} = \frac{0{,}455}{log(Re)^{2{,}58}} = \frac{0{,}455}{log(3{,}93 \cdot 10^{8})^{2{,}58}} = 1{,}769 \cdot 10^{-3}$$

Reibungswiderstand Rumpf

$$W_{\mathrm{R,Rumpf}} = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot O = c_{\mathrm{R}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L - \pi \cdot a \cdot b)$$

$$W_{\mathrm{R,Rumpf}} = 1{,}769 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1030}{2} \cdot 5{,}144^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 100 - \pi \cdot 5 \cdot 2) = 78763 \text{ N}$$

Gesamtreibungswiderstand

$$W_{\mathrm{R,ges}} = W_{\mathrm{R,Rumpf}} + W_{\mathrm{R,Turm}} = 78763 + 4043 = 82806 \text{ N}$$

**6.** Berechnen Sie den dimensionslosen Beiwert des Druckwiderstand $c_{\mathrm{D}}$ des Bootes, wenn der Gesamtwiderstand sich ausschließlich aus dem Reibungswiderstand und dem Druckwiderstand zusammensetzt und bei einer Geschwindigkeit von $c$ = 10 Knoten die erforderliche Antriebsleistung $P$ = 514,4 kW beträgt.

Bezugsfläche $S_{\mathrm{ref}}$ entspricht der in Strömungsrichtung projizierten Fläche des Bootes, einschließlich des Turms

$$S_{\mathrm{ref}} = \pi \cdot R^2 + 2 \cdot b \cdot h = \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 94{,}54 \text{ m}^2$$

Gesamtwiderstand

$$W_{\mathrm{ges}} = \frac{P}{c} = \frac{514{,}4 \cdot 10^3}{5{,}144} = 10^5 \text{ N}$$

Druckwiderstand

$$W_{\mathrm{D}} = W_{\mathrm{ges}} - W_{\mathrm{R,ges}} = 10^5 - 82806 = 17194 \text{ N}$$

Dimensionslosen Beiwert des Druckwiderstands

$$c_{\mathrm{D}} = \frac{W_{\mathrm{D}}}{\frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot S_{\mathrm{ref}}} = \frac{17194}{\frac{1030}{2} \cdot 5{,}144^2 \cdot 94{,}54} = 0{,}0133$$

**7.** Berechnen Sie die horizontale Kraftkomponente $F_{\mathrm{x}}$ und die vertikale Kraftkomponente $F_{\mathrm{y}}$ auf das vordere halbkugelförmige Rumpfsegment infolge des hydrostatischen Drucks.

**Hinweis**

Im Inneren des Bootes herrscht, ebenso wie an der Wasseroberfläche ein Luftdruck von $p$ = 1 bar.

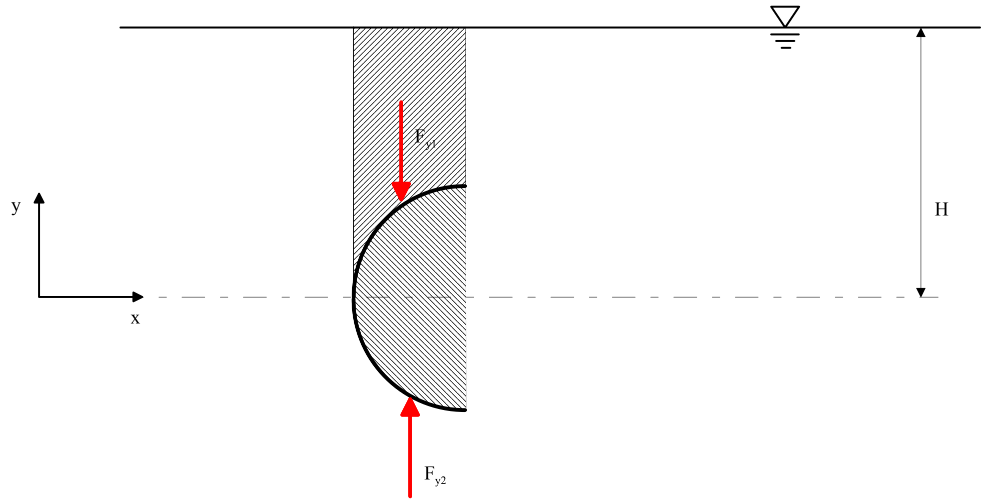
Horizontale Kraftkomponente, entspricht der Druckbelastung auf die in *x*-Richtung projizierte Fläche

$$F_{\mathrm{x}} = p_{\mathrm{hydr.}} \cdot A_{\mathrm{x}} = \rho \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot R^2 = 1030 \cdot 9{,}81 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 5^2 = 1{,}587 \cdot 10^8 \text{ N}$$

Vertikale Kraftkomponente, entspricht der Gewichtskraft des durch die Halbkugel verdrängten Wasservolumens

$$F_{\mathrm{y}} = F_{\mathrm{y2}} - F_{\mathrm{y1}} = \rho \cdot g \cdot V_{\mathrm{Halbkugel}} = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 1030 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot 5^3$$

$$F_{\mathrm{y}} = 2{,}645 \cdot 10^6 \text{ N}$$




**8.** Wie alt ist der Kapitän?

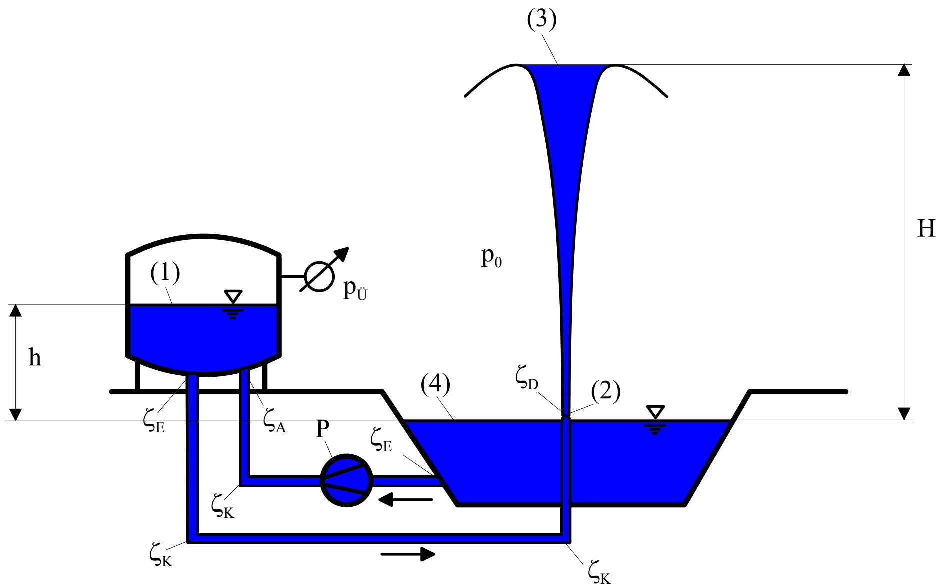
Na, auf diese Antwort kommen Sie auch sicher ohne eine Musterlösung. Lesen Sie einfach noch einmal aufmerksam den ersten Satz der Aufgabenstellung.

*Übung 4-6*

Der Springbrunnen in einem Park wird durch einen Druckbehälter gespeist, der durch eine Pumpe $P$ in der Rücklaufleitung befüllt wird. Der hydraulische Wirkungsgrad der Pumpe beträgt $\eta_{hydr} = 0{,}8$.

Die Fontäne erreicht dabei eine Höhe von $H = 20$ m. Die Länge der Zuleitung vom Druckbehälter bis zur Düse (2) beträgt $L_1 = 15$ m. Der Austrittsdurchmesser der Düse beträgt $d_2 = 15$ mm. Der Innendurchmesser der Zuleitung beträgt $d_1 = 20$ mm. Die Länge der Rückleitung vom Teich zum Druckbehälter beträgt $L_2 = 10$ m und deren Innendurchmesser $d_2 = 25$ mm. Allen Leitungen haben eine absolute Rauheit von $k = 0{,}1$ mm und konstante Querschnitte. Alle Übergänge bei Ein- und Austritt sind scharfkantig. Die Krümmerradien in den Leitungen betragen $R = 50$ mm. Es herrscht ein Umgebungsdruck von $p_0 = 1$ bar. Die Pumpe in der Rückleitung sorgt dafür, dass der Pegelstand im Teich sowie der Pegelstand im Druckbehälter mit $h = 1$ m konstant bleiben. Bei Eintritt in den Druckbehälter beträgt die Strahlkontraktion $\alpha_K = 0{,}62$. Das Manometer am Druckbehälter zeigt einen Überdruck von $p_Ü = 1{,}5$ bar. Die kinematische Viskosität von Wasser beträgt $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

Berechnen Sie die die Austrittsgeschwindigkeit $c_D$ des Wasserstrahls an der Düse und die elektrische Leistungsaufnahme der Pumpe $P_{el}$.




**1.** Austrittsgeschwindigkeit $c_D$ an der Düse

Die Höhe der Fontäne ist eine direkte Funktion der Austrittsgeschwindigkeit. Diese Austrittsgeschwindigkeit stellt sich ein nachdem die Austrittsverluste bereits überwunden wurden. Die Reibung zwischen Fontäne und der Umgebungsluft kann ebenfalls vernachlässigt werden. Somit kann die Fontäne vollständig reibungsfrei betrachtet werden.

Druckbilanz von (2) nach (3)

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_2^{\,2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot c_3^{\,2} + \rho \cdot g \cdot z_3 + p_3$$

mit

$c_2 = c_D$, $c_3 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = H$, $p_2 = p_3 = p_0$

folgt

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_D}^2 = \rho \cdot g \cdot H$$

also

$$c_D = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 100} = 19{,}81\ \mathrm{m/s}$$

Dieses Ergebnis entspricht der Umkehrung der Ausflussgleichung nach Torricelli beziehungsweise dem senkrechten Wurf im reibungsfreien Fall.

**2.** Förderleistung der Pumpe

Betrachten Sie dazu eine Stromlinie, die von der Oberfläche des Teichs (4) in den Druckbehälter (1) führt.

Druckbilanz von (4) nach (1)

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_4}^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + p_4 + \Delta p_{Pumpe} = \frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \Delta p_{V,4-1}$$

Förderleistung

$$P_{Pumpe} = \Delta p_{Pumpe} \cdot \dot{V}$$

**3.** Volumenstrom

$$\dot{V} = c_D \cdot \frac{\pi}{4} \cdot {d_D}^2 = 19{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}015^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s} = \ 3{,}5\ \mathrm{l/s}$$

**4.** Verlustbeiwerte in der Rückleitung

Eintrittsverlust bei scharfkantigem Übergang, schräg, ca. 45°: $\zeta_E = 0{,}81$

Krümmerverluste bei $R/d = 2$: $\zeta_K = 0{,}3$ (rau) oder $\zeta_K = 0{,}16$ (glatt)

Austrittsverlust: $\zeta_A = 1/\alpha_K - 1 = 0{,}61$

**5.** Rohrreibungszahl $\lambda$ in der Rückleitung

Strömungsgeschwindigkeit in der Leitung

$$c_2 = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} \cdot {d_2}^2} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}025^2} = 7{,}13\ \mathrm{m/s}$$

Reynolds-Zahl

$$Re_{d_2} = \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu} = \frac{7{,}13 \cdot 0{,}025}{10^{-6}} = 1{,}78 \cdot 10^5$$

relative Rauigkeit

$$\frac{k}{d_2} = \frac{10^{-4}}{0{,}025} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Aus dem Moody-Diagramm erkennen Sie, dass bei dieser Kombination von Reynolds-Zahl und relativer Rauigkeit das Geschehen im Übergangsbereich abspielt. Näherungsweise lesen Sie den Wert $\lambda = 0{,}029$ aus dem Diagramm ab.

Berechnung Sie die Rohrreibungszahl

$$\lambda_2 = 0{,}0055 \cdot \left[1 + \sqrt[3]{20.000 \cdot \frac{k}{d} + \frac{10^6}{Re_\mathrm{d}}}\right] = 0{,}0055 \cdot \left[1 + \sqrt[3]{20.000 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + \frac{10^6}{1{,}78 \cdot 10^5}}\right]$$
$$= 0{,}0297$$

Überprüfung der Annahme „Übergangsbereich“

$$8 \le \frac{k}{d} \cdot Re_\mathrm{d} \cdot \sqrt{\lambda} \le 200$$
$$8 \le 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}78 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{0{,}0297} \le 200$$
$$8 \le 122{,}7 \le 200$$

Die Bedingung ist also erfüllt und somit ist die Annahme korrekt. Der aus dem Moody-Diagramm abgelesene Wert für $\lambda$ liegt erfreulicherweise auch in der Nähe des berechneten Werts.

Somit muss der Verlustbeiwert für den Krümmer zwischen den Werten für „glatt“ und „rau“ liegen. Der Mittelwert beträgt also

$$\lambda_K \approx \frac{0{,}3 + 0{,}16}{2} = 0{,}23$$

**6.** Druckverlust in der Rückleitung

$$\Delta p_{V,4-1} = \frac{\rho}{2} \cdot {c_2}^2 \cdot \left(\lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_A\right) = \frac{10^3}{2} \cdot 7{,}13^2 \cdot \left(0{,}0297 \cdot \frac{10}{0{,}025} + 0{,}81 + 0{,}23 + 0{,}61\right)$$
$$= 3{,}44 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**7.** Druckerhöhung durch die Pumpe

Druckbilanz von (4) nach (1)

$$\frac{\rho}{2} \cdot {c_4}^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + p_4 + \Delta p_{Pumpe} = \frac{\rho}{2} \cdot {c_1}^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \Delta p_{V,4-1}$$

mit

$c_4 = c_1 = 0$ (konstante Pegelstände), $z_4 = 0$, $z_1 = h$, $p_4 = p_0$, $p_1 = p_0 + p_Ü$

folgt

$$\Delta p_{Pumpe} = \rho \cdot g \cdot h + p_Ü + \Delta p_{V,4-1} = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 10^5 + 3{,}44 \cdot 10^5 = 5{,}0381 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**8.** Förderleistung der Pumpe

$$P_{Pumpe} = \Delta p_{Pumpe} \cdot \dot{V}$$
$$= 5{,}0381 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}763 \cdot 10^3 \text{ W} = 1{,}763 \text{ kW}$$

**9.** Elektrische Leistungsaufnahme der Pumpe

$$P_{el} = \frac{1}{\eta_{hydr}} \cdot P_{Pumpe} = \frac{1}{0{,}8} \cdot 1{,}763 \text{ kW} = 2{,}204 \text{ kW}$$